

円錐曲線

「幾何再入門 G. ジェニングス著」を参考にしました.

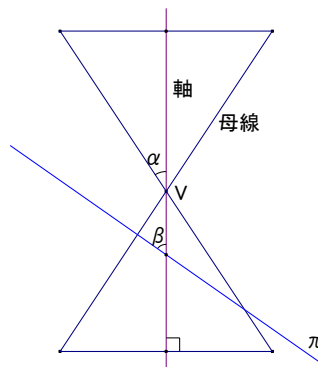
1. 楕円, 放物線, 双曲線

直円錐を平面で切った時にできる曲線を円錐曲線といいます.
そのうち代表的な曲線が「楕円」, 「放物線」, 「双曲線」(滑らかな円錐曲線)ですが, 特別な場合(円錐の頂点を通るとき)には1点になったり, 1直線, 2直線になることもあります.
ここでは滑らかな円錐曲線のみを考えます.

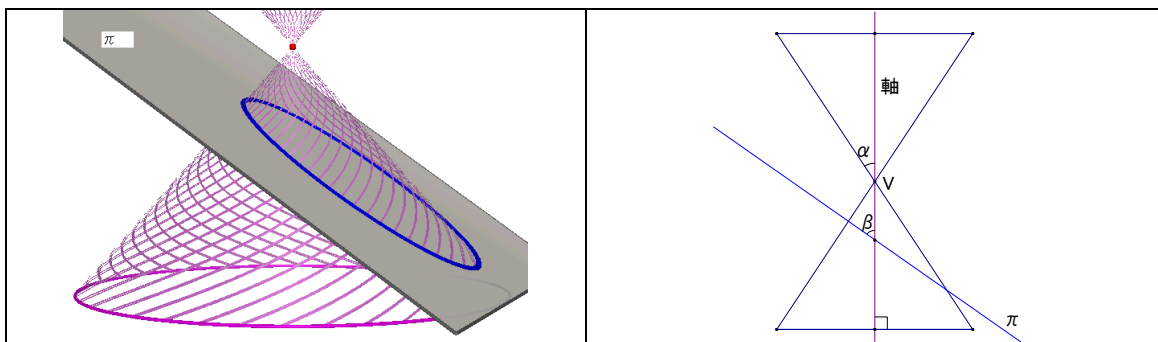
以下, 直円錐を K , その頂点を V , 軸を L , さらに L と母線のなす角を α , L と平面 π のなす角を β , K の π による切り口を C とします. (右は L を含み, π に垂直な平面による断面です.)
 π が V を通らないとき, C は,

$$\begin{cases} \alpha < \beta \text{ のとき, 楕円} \\ \alpha = \beta \text{ のとき, 放物線} \\ \alpha > \beta \text{ のとき, 双曲線} \end{cases}$$

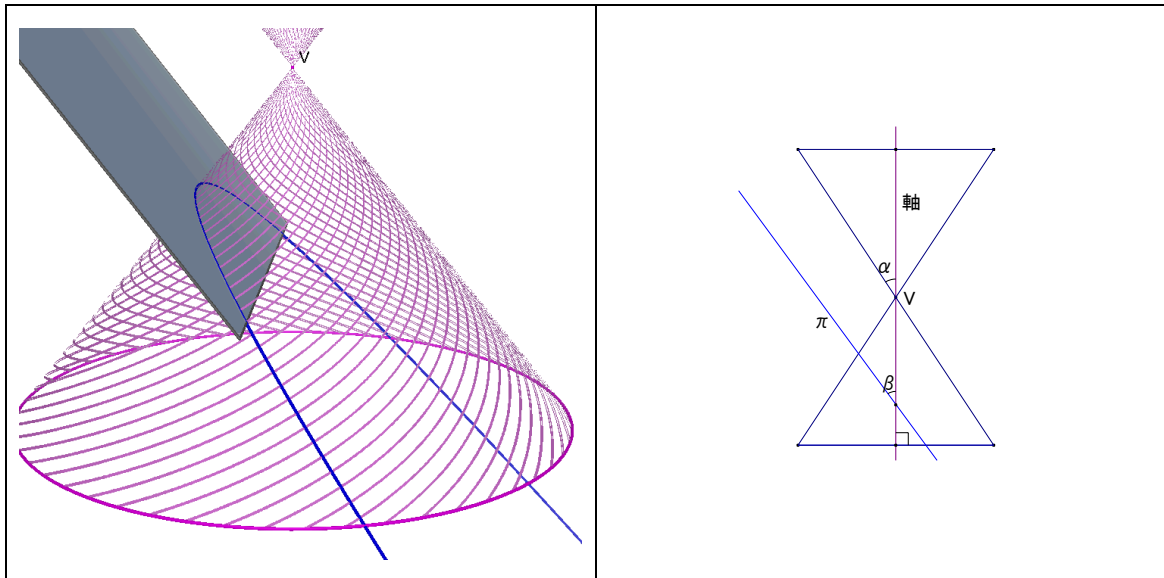
となります.



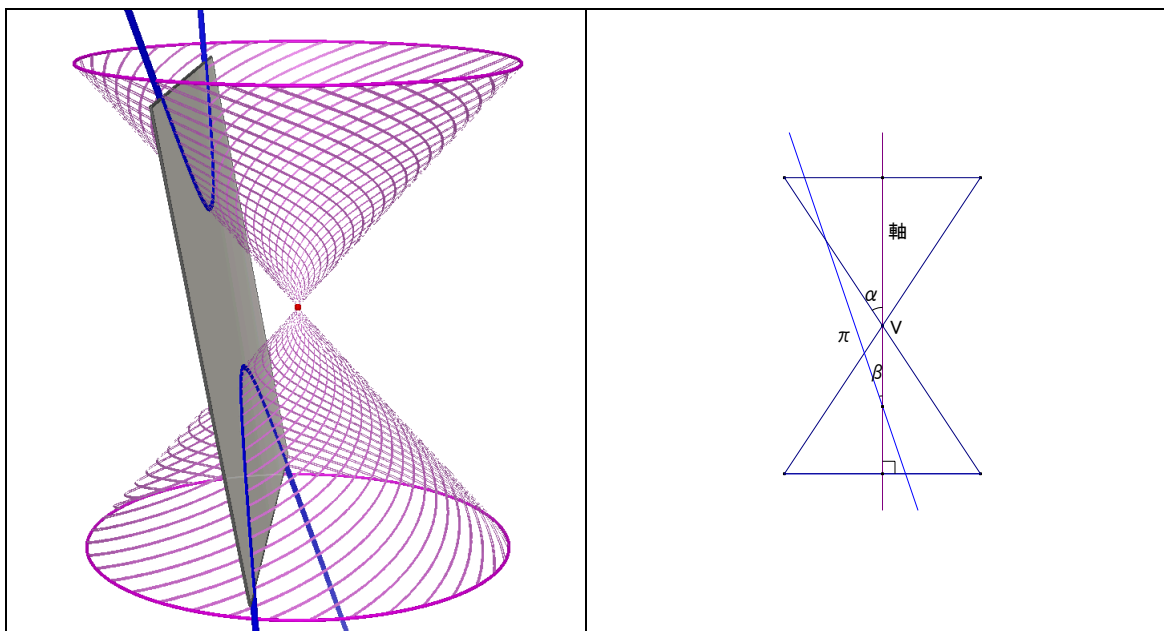
1-1. 楕円



1-2. 放物線



1-3. 双曲線



Cabri II による検証

A,B,E,F を drag して下さい。 (視点を変えるときは右ボタンを押しながらグリグリして下さい.)
楕円, 放物線, 双曲線 [three kinds of conic.html](http://three.kinds.of.conic.html), 放物線 parabola.html,

2. 図形的証明

楕円や双曲線になることの図形的証明です. (私は長いこと, この証明はアポロニウスによると思っていたのですが, Jennings 氏によると, オランダの G.P.Dandelin による証明で 1822 年だそうです.)

2-1. 楕円になることの証明

$\alpha < \beta$ のとき, ちょうど二つの球 S_1, S_2 を K に内接し π に接するようにとることができます.

S_1, S_2 と π の接点を各々 F, F' とします. さらに C 上に点 P をとり, 直線 VP と S_1, S_2 の接点をそれぞれ Q, R とします. P から S_1 に引いた 2 本の接線の長さは等しいので,

$$PF = PQ$$

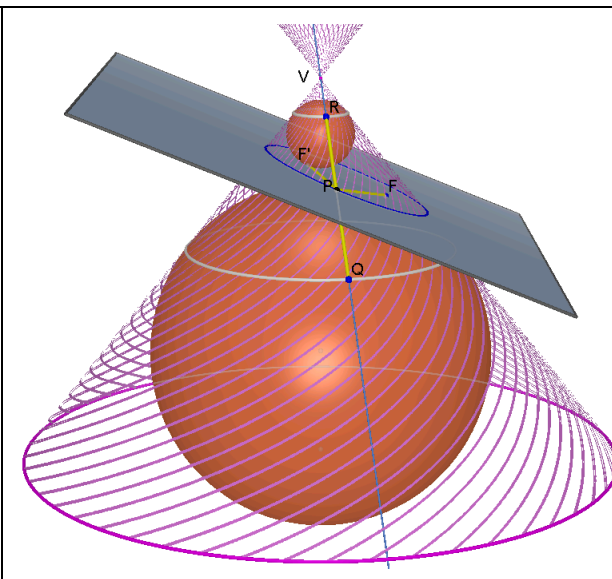
S_2 に引いた 2 本の接線の長さも等しいので,

$$PF' = PR$$

ゆえに,

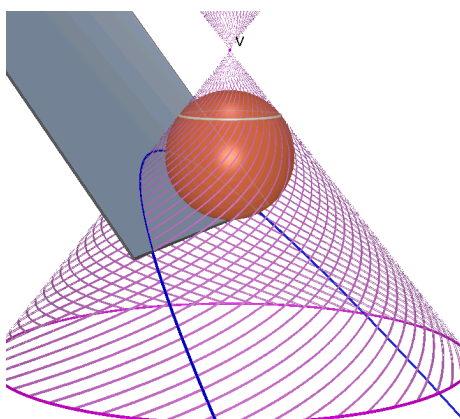
$$PF + PF' = PQ + PR = QR \text{ (一定)}$$

従って, F と F' は楕円 C の焦点になります.



2-2. 放物線の場合

放物線の場合は, 内接球が一個だけしかできませんから, 類似の方法は使えません. 次の節をご覧ください.



2-3. 双曲線になることの証明

$\alpha > \beta$ のとき, ちょうど二つの球 S_1, S_2 を K に内接し π に接するようにとることができます.

ただし, 今度は S_1 と S_2 は V をはさんで反対の側にあります. S_1, S_2 と π の接点を各々 F, F' とします. さらに C 上に点 P をとり, 直線 VP と S_1, S_2 の接点をそれぞれ Q, R とします. P から S_1 に引いた2本の接線の長さは等しいので,

$$PF = PQ$$

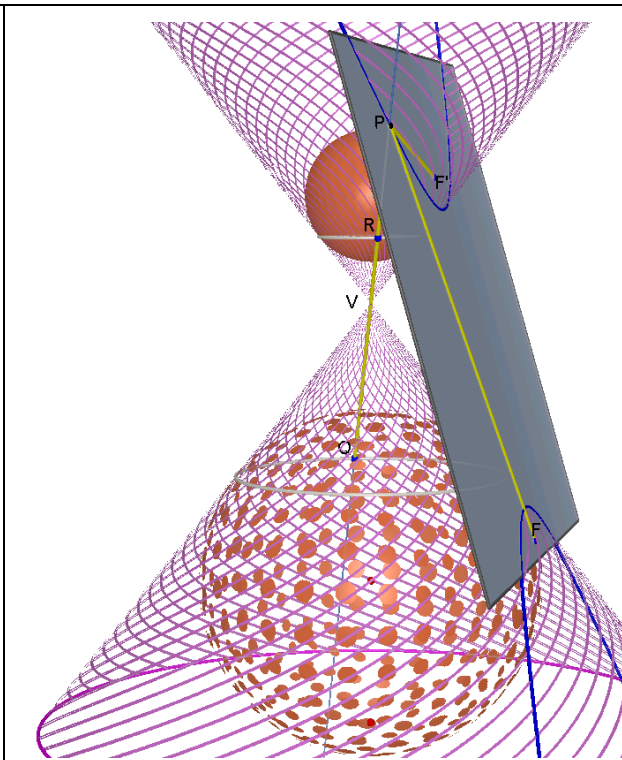
S_2 に引いた2本の接線の長さも等しいので,

$$PF' = PR$$

ゆえに,

$$|PF - PF'| = |PQ - PR| = QR \text{ (一定)}$$

従って, F と F' は双曲線 C の焦点になります.

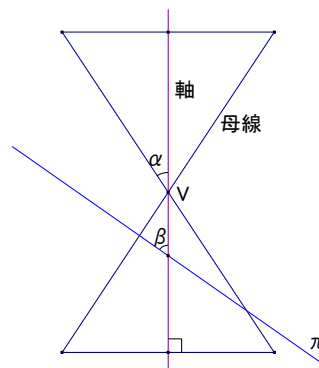
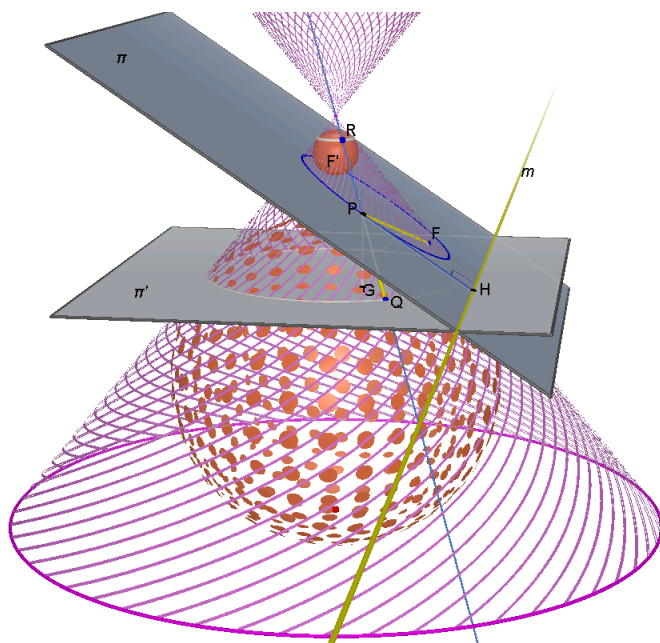


2-4. Cabri II による検証 (楕円&双曲線)

A,B,P,D,E を drag して下さい. (視点を変えるときは右ボタンを押しながらグリグリして下さい.)

focus of conic.html

3. 準線と離心率



S_1 を K に内接し π に接する球の 1 つとします. S_1 と K の接点は円になりますが, この円を含む平面を π' , π' と π の交線を m , P から m に下ろした垂線の足を H , P から π' に下ろした垂線の足を G とすると,
 $\angle GPQ = (\text{軸と母線のなす角}) = \alpha$, $\angle GPH = (\text{軸と}\pi\text{のなす角}) = \beta$

P から S_1 に引いた 2 本の接線の長さは等しいので,

$$PF = PQ$$

$PG \perp \pi'$ だから,

$$PQ \cdot \cos \alpha = PH \cdot \cos \beta \quad (= PG)$$

よって,

$$\frac{PF}{PH} = \frac{PQ}{PH} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \quad (\text{一定})$$

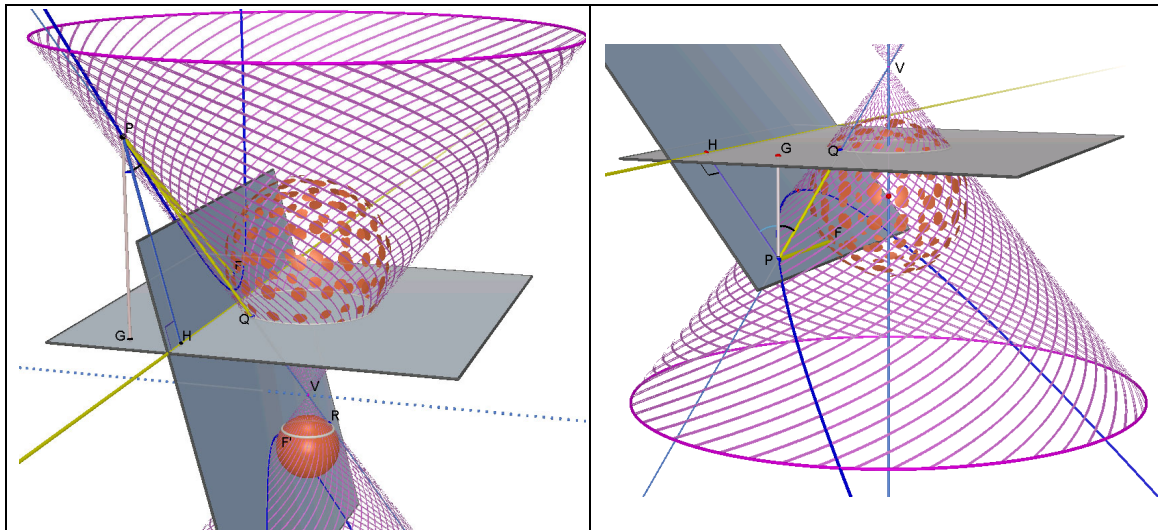
ゆえに, 離心率 e を $e = \frac{PF}{PH}$ と定めると, P が C 上を動いても e は一定で, かつ

$$\begin{cases} 0 < e < 1 \text{ のとき, 楕円} \\ e = 1 \text{ のとき, 放物線} \\ e > 1 \text{ のとき, 双曲線} \end{cases}$$

となります. また, m は準線となります.

(なお, この証明も, Jennings 氏によると, G.P.Dandelin 氏によるものだそうです.)

左下は，双曲線，右下は放物線の場合です．



3-1. Cabri II による検証（離心率）

A,B,P,D,E を drag して下さい．（視点を変えるときは右ボタンを押しながらグリグリして下さい．）

楕円，双曲線 eccentricity.html， 放物線 eccentricity2.html，