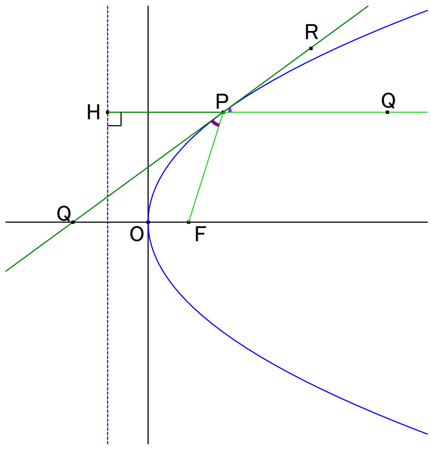
2 次曲線の基本的な性質

2 次曲線:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

のうち代表的なものは，放物線，楕円，双曲線の３つです.

1. 放物線



放物線は，焦点と準線までの距離が等しい点の軌跡です．焦点が $F(p,0)$，準線が $l : x = -p$ の時，その式は

$$y^2 = 4px$$

P から l に下ろした垂線の足を H とすると，定義より $\mathrm{PF} = \mathrm{PH}$．かつ, 図のように点を決めると，∠FPQ=∠QPR となります.

すなわち，P に於いて 入射角と反射角が等しいので，x 軸に平行な向きに入射してきた光は，全て焦点 F に集まります.

これを利用して反射望遠鏡や衛星放送のアンテナなどが作られています.

Cabri II による検証

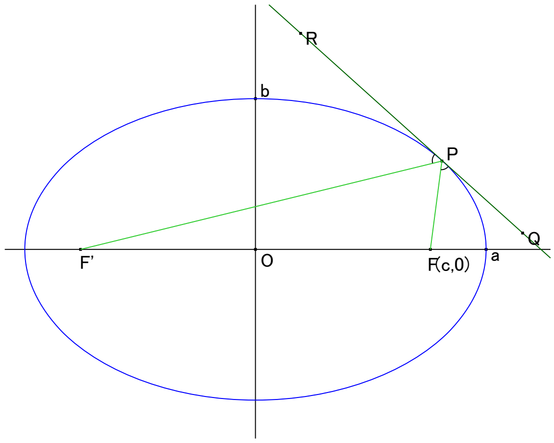
P と F を drag してください.　[parabola.html]

2. 楕円

楕円は，2 定点（焦点と言う）からの距離の和が等しい点の軌跡です．焦点が $F(c,0)$，$F'(c,0)$ の時，その式は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (\text{但し } b^2=a^2-c^2)$$

定義より　$\mathrm{PF+PF'}=2a$．かつ，図のように点を決めると，∠FPQ=∠F’PR となります．すなわち，P に於いて入射角と反射角が等しいので，ひとつの焦点から出た光は，もう一方の焦点に集まります．



これを利用して歯科医の楕円鏡や，“ささやきの回廊”(F で囁くと F’にいる人にのみ聞こえる）などが作られています．(Gennings「幾何再入門」).

CabriⅡによる検証

P と a, b を drag してください．　ellipse.html

3. 双曲線

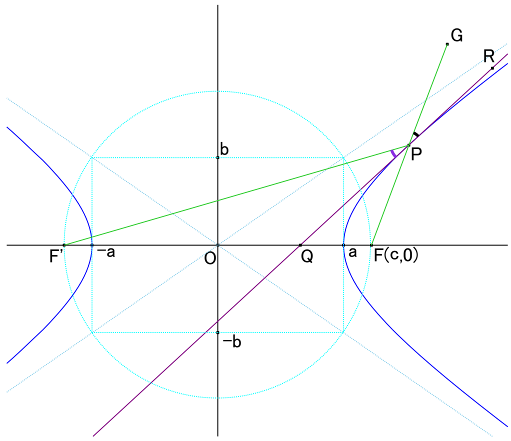
双曲線は，2 定点（焦点と言う）からの距離の差が等しい点の軌跡です．焦点が $F(c,0)$，$F'(c,0)$ の時，その式は

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (\text{但し } b^2=c^2-a^2)$$

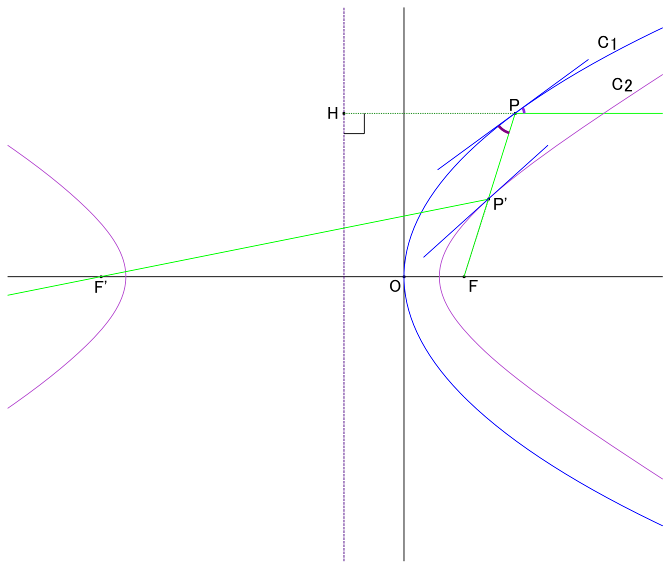
定義より $|\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}|=2a$．かつ，

図において，∠QPF'=∠RPG となります．

すなわち，ひとつの焦点から出た光は，もう一方の焦点から出た光のように見えます．



これを利用して，反射望遠鏡を改良することができます．右図で C_1 は放物線，C_2 は双曲線で，焦点 F を共有するとします．C_2 の他の焦点を F' とすると，x 軸に平行に入ってきた光は，まず焦点 F に向かいますが，そこで双曲面に反射されて F'に集まります．



このようにして，適当なところに光を集めることができます．(Gennings「幾何再入門」)

CabriⅡによる検証

P と a, b を drag してください． hyperbolic.html （基本の性質）

P ,Q, F, F', a を drag してください． parabola&hyperbolic mirror.html （放物＆双曲面鏡）

なお，証明は 高校の教科書，参考書，Gennings「幾何再入門」または web でも豊富なので省略します．