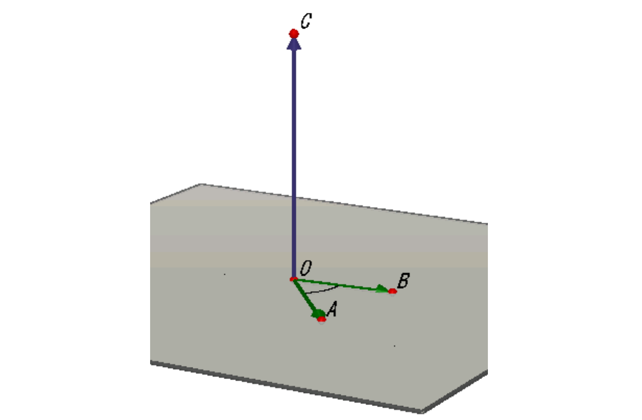
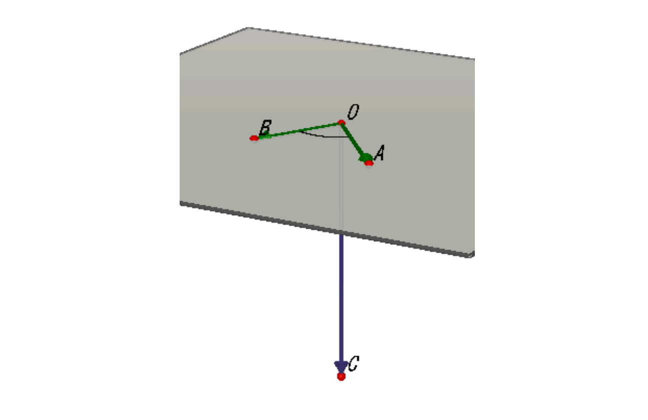
空間ベクトルの外積

ここでは出来る限り図形的に説明します．計算による証明は 例えば Wikipedia をご覧ください．

1.定義

	
OA を OB に重ねるようにネジを回すと，ネジは平面に対し上向きに進む	OA を OB に重ねるようにネジを回すと，ネジは平面に対し下向きに進む

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積 $\vec{c}$ は，「$\vec{a},\vec{b}$ が張る平面 π に垂直」で，かつ「長さが $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の張る三角形の面積 S と等しい」3 次元ベクトルとします．ただし平面と直交するベクトルの向きは 2 つあり，そのいずれかを選ぶ必要があります．そこで，$\vec{c}$ の向きは，

$\vec{a}$ を $\vec{b}$ と平行になるように,180 度以下の角度だけ廻したときに，右ネジの進む向き

とします．（この定義では $\vec{a}\,//\,\vec{b}$ のときは $\vec{c}$ の向きが定まりませんが，このときは $S=0$ だから，$\vec{c}=\vec{0}$ とします.）

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積 $\vec{c}$ を $\vec{a}\times\vec{b}$ と表すことにします．すると $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の角度が $\theta(0<\theta<\pi)$ のとき，定義より，

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta,\quad (\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{a} \text{ かつ } (\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{b}$$

また定義から 次の性質も明らかです．

$$\vec{b}\times\vec{a}=-(\vec{a}\times\vec{b}),\quad \vec{a}\times\vec{a}=\vec{0},\quad \vec{0}\times\vec{a}=\vec{a}\times 0=\vec{0},\quad (k\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(k\vec{b})=k(\vec{a}\times\vec{b})\quad (k\text{は実数})$$

1.1 Cabri3D による検証

A,B,C を動かしてみてください．$\vec{a}=\overrightarrow{OA},\ \vec{b}=\overrightarrow{OB},\ \vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\overrightarrow{OC}$ です．

（視点を変えるときは右ボタンを押しながらグリグリして下さい.）　definition.html

2.分配法則

外積には分配法則が成り立ちます．すなわち

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}\,,\quad (\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}$$

2 番目の式は，一番目の式から，「$\vec{b}\times\vec{a}=-(\vec{a}\times\vec{b})$」を使えば簡単に証明できるので，1 番目の式だけ証明します．

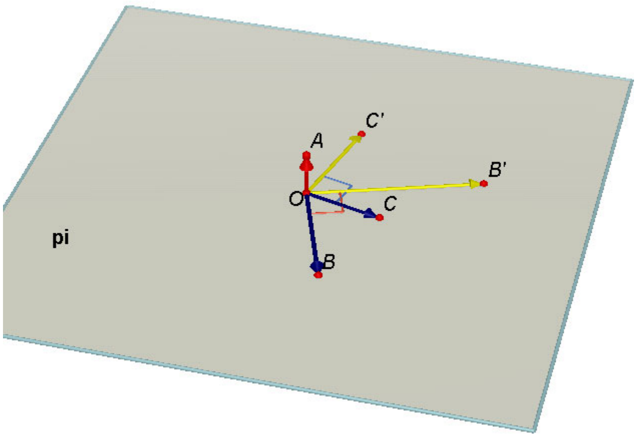
2-1. $\vec{a}$ が，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ の張る平面と垂直なとき．

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}\,,\vec{b}=\overrightarrow{OB}\,,\vec{c}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OB'}=\vec{a}\times\vec{b}\,,\overrightarrow{OC'}=\vec{a}\times\vec{c}$，さらに平面 OBC を π とします．

$\vec{a}\perp\vec{b}$ かつ $\vec{a}\perp\vec{c}$ のとき，点 B,C は π 上で，それぞれ点 B,C を O の周りに 90 度回転し，O からの距離を $|\vec{a}|$ 倍にした点となります．すなわち平面 π 上のベクトル $\vec{p}$ に対しては，

「$\vec{a}\times\vec{p}$」は「$\vec{p}$ を $\vec{a}$ の周りに 90 度回転し，O からの距離を $|\vec{a}|$ 倍にする」こと

であり，回転と拡大の合成変換です．　よって 「$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$」が成り立ちます．



2-1-1. Cabri3D による検証.

点 A,B,C を動かしてみてください．(視点を変えるときは右ボタンを押しながらグリグリして下さい.)

[distribution law basic.html]

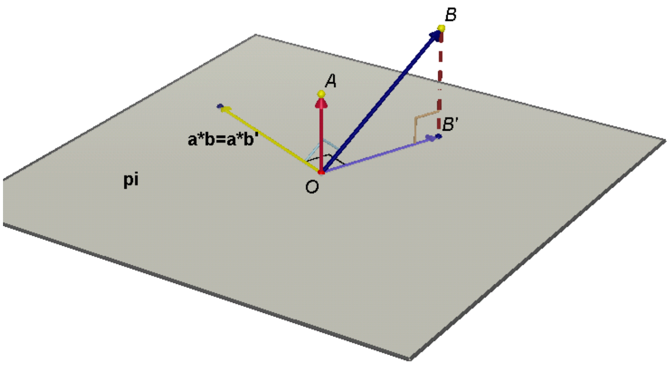
2-2. $\vec{a}$ が，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ の張る平面と垂直でないとき．

$\vec{a}$ と垂直で原点 O を通る平面を π とし，π の上への $\vec{b}$ の正射影を $\vec{b}'$ としたとき、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の張る三角形の面積は $\vec{a}$ と $\vec{b}'$ の張る三角形の面積と一致するので、「$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{b}'$」です。

ゆえに、空間内のベクトル $\vec{p}$ に対し，「$\vec{a}\times\vec{p}$」は

「$\vec{p}$ の平面 π への正射影ベクトル $\vec{p}'$ を作り、$\vec{p}'$ を $\vec{a}$ の周りに 90 度回し，O からの距離を $|\vec{a}|$ 倍にする」

ことと同じであり，**正射影と回転と拡大の合成変換**です．　従って，「$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$」が成り立ちます．



2-2-1 Cabri3D による検証

点 A,B,C を動かしてみてください．(視点を変えるときは右ボタンを押しながらグリグリして下さい.)
distribution law basic.html

3. 外積の成分表示

以上から $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),\ \vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ のとき、$\overrightarrow{e_x}=(1,0,0),\overrightarrow{e_y}=(0,1,0),\overrightarrow{e_z}=(0,0,1)$ とすると、

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b} &= (x_1\cdot\overrightarrow{e_x}+y_1\cdot\overrightarrow{e_y}+z_1\cdot\overrightarrow{e_z})\times(x_2\cdot\overrightarrow{e_x}+y_2\cdot\overrightarrow{e_y}+z_2\cdot\overrightarrow{e_z}) \\
&= (x_1y_2-x_2y_1)\cdot(\overrightarrow{e_x}\times\overrightarrow{e_y})+(y_1z_2-z_2y_1)\cdot(\overrightarrow{e_y}\times\overrightarrow{e_z})+(z_1x_2-x_1z_2)\cdot(\overrightarrow{e_z}\times\overrightarrow{e_x}) \\
&= (x_1y_2-x_2y_1)\cdot\overrightarrow{e_z}+(y_1z_2-z_2y_1)\cdot\overrightarrow{e_x}+(z_1x_2-x_1z_2)\cdot\overrightarrow{e_y} \\
&= (y_1z_2-z_2y_1,\quad z_1x_2-x_1z_2,\quad x_1y_2-x_2y_1)
\end{aligned}
$$