$x^2+y^2+z^2+u^2=1$ 上の初等幾何

-直投影＆スライスして見る-

Cabri研究会　生越　茂樹

2011年10月2日

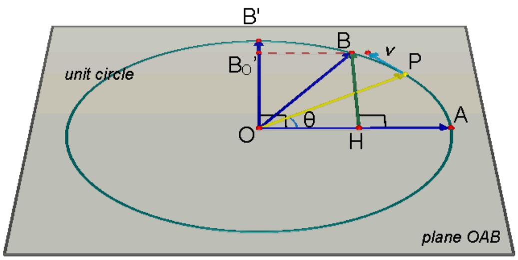
§ 1.超球面: $x^2+y^2+z^2+u^2=1$の断面

$u=t$ のとき，$x^2+y^2+z^2=1-t^2$

故に, 平面 $u=t$ による断面は，半径が $\sqrt{1-t^2}$ の球

u

§ 2. 超球面上の直線



超球面上の2点A,Bに対し,

$$\overrightarrow{OB_0'} = \overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA})\overrightarrow{OA}$$

と定めると，$\overrightarrow{OB'_0}\cdot\overrightarrow{OA}=0$

さらに，$\overrightarrow{OB'}=\dfrac{\overrightarrow{OB_0'}}{|\overrightarrow{OB_0'}|}$ とすると，

$\overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ かつ $|\overrightarrow{OB'}|=1$

ここで,

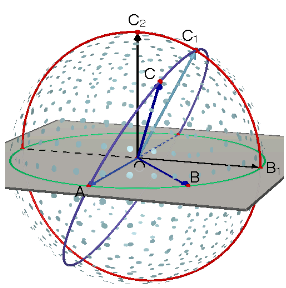
$$\overrightarrow{OP} = \cos\theta\ \overrightarrow{OA} + \sin\theta\ \overrightarrow{OB'} \cdots ①$$

とすると,PはAからの偏角がθで 単位円上の点. そして
θ を 「$0 \leq \theta < 2\pi$」の範囲で動かすと①は直線ABを表す.
さらに，①を θ に関し微分して

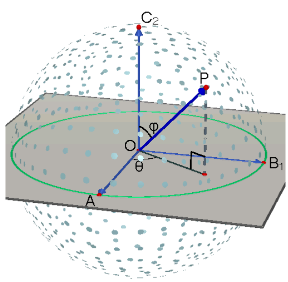
$$\vec{v} = -\sin\theta\ \overrightarrow{OA} + \cos\theta\ \overrightarrow{OB'} \cdots ②$$

とすると, $\vec{v} \perp \overrightarrow{OP}$ ($\vec{v}$ はPに於ける接ベクトル)

§ 3. 超球面上の平面



超球面上の3点A,B,Cが与えられているとする.
§2と同様に $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB_1},\overrightarrow{OC_2}$ が互いに直交する
3点A,B_1,C_2を，図の様に 超球面上に取れる.
($B_1 \to C_1 \to C_2$ の順に取ればよい.)



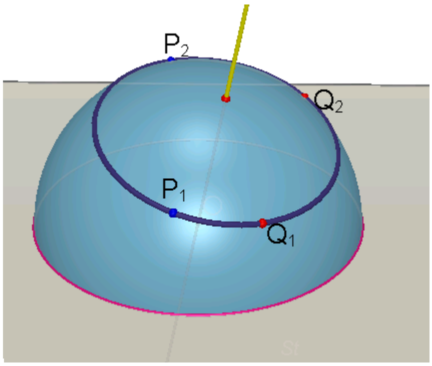
そして, 平面ABC上の点Pは,

$$\overrightarrow{OP}=\sin\phi\cos\theta\cdot\overrightarrow{OA}+\sin\phi\sin\theta\cdot\overrightarrow{OB_1}+\cos\phi\cdot\overrightarrow{OC_2}$$

$$(0 \leq \theta < 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi)$$

と表される.

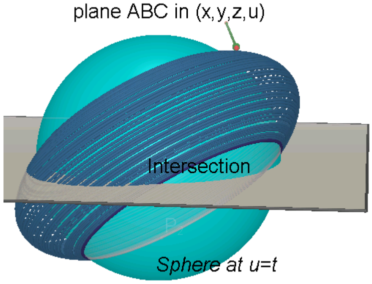
Question



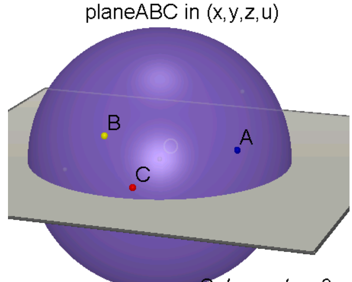
$P_i, Q_i (i=1,2)$ は, それぞれ平面 $u=t$ と直線AB, ACとの交点です.
平面 $u=t$ と平面ABCの交線は, どの様になるでしょうか?

$x^2+y^2+z^2+u^2=1$ 上の平面ABCの xyz空間への直投影は, 楕円をある軸に関し回転して出来る回転楕円面となる.
特に, A,B,Cのu成分が 0 の時は, 平面ABCは $x^2+y^2+z^2=1, u=0$ (x,y,z 空間内の単位球)となる.

平面.cg3



A_u, B_u, C_uのいずれかが0でない時



$A_u=B_u=C_u=0$の時

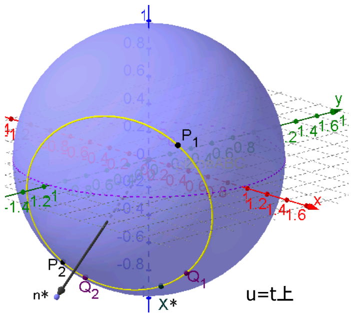
【証明】4次元なので, $\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}_1},\overrightarrow{\mathrm{OC}_2}$と直交する $\vec{n}=(a,b,c,d)$ ($\neq\vec{0}$)がとれる.
($\vec{n}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とも直交する.)

$u=t$ と平面ABCの任意の共有点をX(x,y,z,u)とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\vec{n}=(\sin\phi\cos\theta\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\sin\phi\sin\theta\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}_1}+\cos\phi\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}_2}\ )\cdot\vec{n}\ =0\ \cdots(*)$$

ここで $\overrightarrow{\mathrm{OX}}=(\mathrm{X}^*,\mathrm{X}_u)$の様に, xyz成分を X^* の様に表すと,

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\vec{n}=(\mathrm{X}^*,\mathrm{X}_u)\cdot(n^*,n_u)=(\mathrm{X}^*,\mathrm{t})\cdot(n^*,n_u)=\overrightarrow{\mathrm{OX}^*}\cdot\overrightarrow{n^*}+t\times n_u=0$$



故に「 $t\times n_u=-e$ 」とおくと, e は Xに依らず,

$\overrightarrow{\mathrm{OX}^*}\cdot\overrightarrow{n^*}=e$ $\quad(\Longleftrightarrow aX_1+bX_2+cX_3=e)$

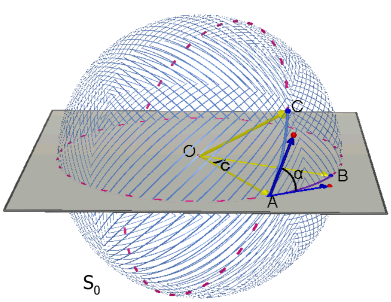
即ち, 平面ABCと$u=t$ の交線は, (x,y,z)空間では

$x^2+y^2+z^2=1-t^2$ と $ax+by+cz=e$

の交線と一致する. (但し $e=-t\times n_u$)

((*)より, R^4では, 平面ABCは, $ax+by+cz+du=0$
と $x^2+y^2+z^2+u^2=1$ の共通部分となる.)

§4. 超球面上の平面に於ける三角法



超球面上の3点A,B,Cに対し, 長さ $\overline{\mathrm{AB}}$ は,

$\overline{\mathrm{AB}}=\angle\mathrm{AOB}$ (§2の θ の変化と等しい)

角BACは, Aにおける直線AB,ACの接ベクトルのなす角 (図のα).

この時, 平面ABC上で通常の球面三角法が成り立つ. 例えば,

余弦定理: $\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos\alpha$

正弦定理: $\dfrac{\sin a}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin b}{\sin\beta}=\dfrac{\sin c}{\sin\gamma}$

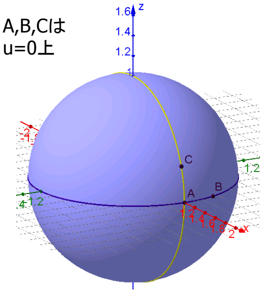
(但し $\alpha=\angle\mathrm{CAB}$, $\beta=\angle\mathrm{ABC}$, $\gamma=\angle\mathrm{BCA}$, $a=\overline{\mathrm{BC}}$, $b=\overline{\mathrm{CA}}$, $c=\overline{\mathrm{AB}}$)

4次元球の断面.ggb

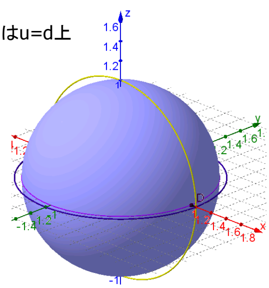
これは, 適当な合同変換(回転&対称変換)により, A,B,C の u 成分を 0 にすると
平面ABCが $u=0$上の球 $\mathrm{S}_0(x^2+y^2+z^2=1,\ u=0)$ に移せる事からも明らか.

§ 5. 超球面は，局所的に ユークリッド空間

A,B,Cは
u=0上



Dはu=d上



例えば, $x^2+y^2+z^2=1$, $u=0$上に, 点A(1,0,0,0)と, Aに近い点B,Cを図の様 (Bは赤道上, Cは経線上) に取ると,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \approx c(0,1,0,0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} \approx b(0,0,1,0)$$

さらに $\mathrm{D}(\sqrt{1-d^2},\ 0,0,d)$ とすると, Dは超球面上の点で

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} \approx d(0,0,0,1)$$

故に A,B,C,Dが非常に近い時, $\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}},\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ が直交し,
「局所的には 超球面はユークリッド空間」となる.

一般に A,B,C,Dは超球面上の4点で，A,B,Cは $u=0$上にあり,
直線AB, AC, ADが直交しているとする．このとき直線ADの
接ベクトル $\vec{n}$ は平面ABCと直交し $\vec{n}=d(0,0,0,1)$.

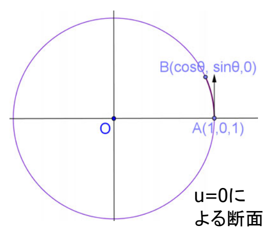
即ち「$u=t$ による断面」や「$u=0$への直投影」では，この
局所ユークリッド空間はつぶれてしまう．中心投影では見える.

局所的にはユークリッド空間.cg3

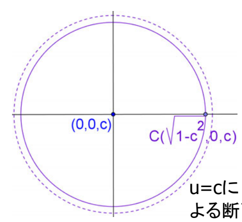
【Flat lander(2次元人)との比較】
球面$S^3(x^2+y^2+u^2=1)$上に住む２次元の生物にとっても
同様で，球面上に３点を，A,Bは $u=0$上に, CはAB⊥AC
が成り立つ様にとるなら，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}//(0,0,1)$ で，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で
張る空間は, 局所的にユークリッド平面である. (右図)

ところが $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と平面ABC は, 我々のように「見えている」
(下左図)のでなく，あくまでも数学的に彼らの平面と
「対応可能」なだけである. (下右図)

３次元の我々にとっても, 超球面上に張り付いている
３次元空間を見る事はできない．対応なら考えられる.

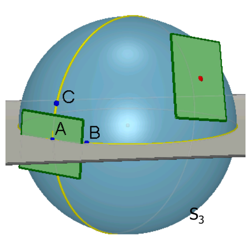


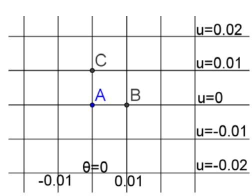
u=0による断面



u=cによる断面

$\left(\begin{array}{l}\mathrm{B}_x \approx \mathrm{C}_x\text{である．即ち}\\ \text{C は Aに非常に近い.}\end{array}\right)$





平面と右上図との数学的対応

まとめ

超球面は　局所的にはユークリッド的であり,

大局的には球面幾何が成り立つ.

もしかすると, 我々の宇宙は超球面かもしれない.