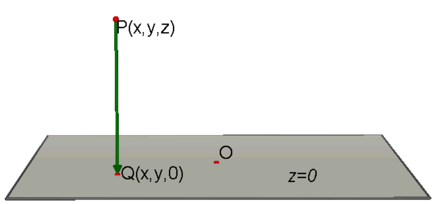
4次元立体の投影

-超球面，超直方体，超4面体-

Cabri 研究会　2011年12月4日

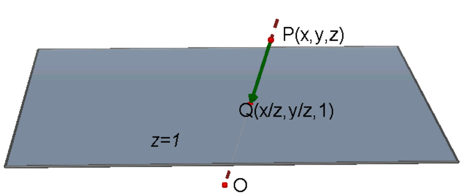
生越　茂樹

§1. 3次元立体の 2次元への投影



$\mathrm{P}(x,y,z)$ の xy 平面への
直投影を $\mathrm{Q}(X,Y,\mathrm{Z})$とすると,

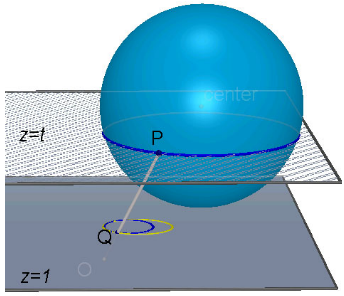
$$\begin{cases} X = x \\ Y = y \\ Z = 0 \end{cases}$$

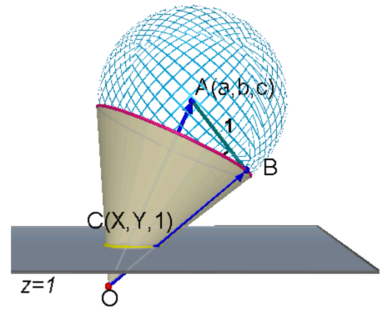


$\mathrm{P}(x,y,z)$ の, 原点から 平面 $z=1$ の上
への中心投影を $\mathrm{Q}(X,Y,\mathrm{Z})$とすると,

$$\begin{cases} X = \dfrac{x}{z} \\ Y = \dfrac{y}{z} \\ Z = 1 \end{cases}$$

§ 1-1. 単位球の中心投影





$z=t$ と球の交円の中心投影は円C_t
C_t の包絡線が単位球の中心投影 K.
この包絡線は 2次曲線で，球に外接する円錐と $z=1$ の交線と一致する．

3次元球面の投影.cg3

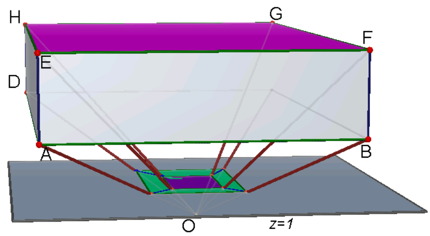
[Kの式] 球の中心をA(a,b,c),円錐との接点をB,
Bの中心投影をC$(X,Y,1)$とすると,
「$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\pm\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{OC}}$」より

$$(a,b,c)\cdot(X,Y,1)=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-1}\cdot\sqrt{X^2+Y^2+1}$$
$$\Longleftrightarrow (aX+bY+c)^2=(a^2+b^2+c^2-1)(X^2+Y^2+1)$$
$$\Longleftrightarrow (1-b^2-c^2)X^2+(1-a^2-c^2)Y^2+$$
$$+2abXY+2acX+2bcY+1-a^2-b^2=0$$

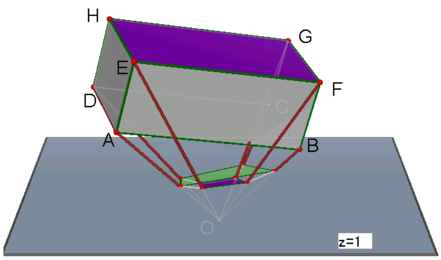
平面*z=t*による断面を利用した中心投影の作図

3次元物体Vの平面 $\mathrm{z}=t$ による2次元断面をT,
原点を中心とした $1/t$ 倍の相似変換をf とすると,
Tのf による像T'の通過領域が, Vの中心投影となる.

§ 1-2.　直方体の中心投影



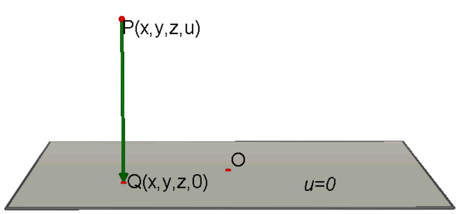
底面がz=1と平行な直方体のとき，底面と上面の中心投影は長方形，直方体の中心投影は，長方形2個と(側面を投影した)台形が4個．特別な場合には, 長方形の1つがもう1つの長方形に含まれる.



一般の直方体のときは，どの四角形も台形や長方形にならない．しかし直方体の平行な辺の像の延長は 1点(消点)で交わる.

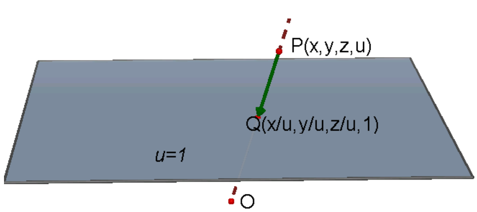
直方体1.cg3，直方体2.cg3

§ 2. 4次元立体の 3次元への投影



$\mathrm{P}(x,y,z,u)$ の 超平面 $u=0$ への直投影を $\mathrm{Q}(X,Y,Z,U)$とすると,

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y \\ Z = z \\ U = 0 \end{cases}$$

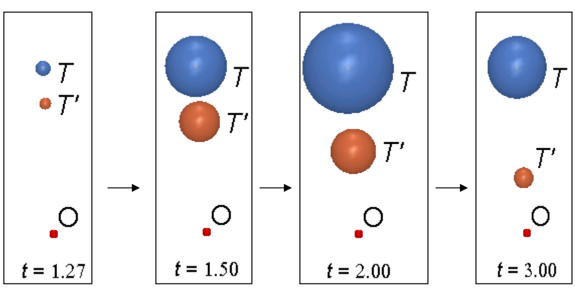


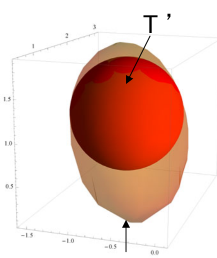
$\mathrm{P}(x,y,z,u)$ の, 原点から 超平面 $u=1$ 上への中心投影を $\mathrm{Q}(X,Y,Z,U)$とすると,

$$\begin{cases} X = \dfrac{x}{u} \\ Y = \dfrac{y}{u} \\ Z = \dfrac{z}{u} \\ U = 1 \end{cases}$$

§ 3.超球面

§ 3.1　単位超球の中心投影





単位超球 $S:(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+(u-d)^2=1.$

S の超平面 $u=t$ による断面をTとすると，

$$T:(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1-(t-d)^2.$$

Tの中心は, 定点A(a,b,c).　この球を原点中心の相似変換:

$$X=x/t,\ \ Y=y/t,\ \ Z=z/t$$

で移した球をT' とすると，T'の通過領域Kが S の中心投影となる. Kは 2次曲面で，超球に外接する超円錐と $u=1$ の断面と一致する．3次元の場合と同様にして，

$$\text{K: } (aX+bY+cZ+d)^2=(a^2+b^2+c^2+d^2-1)(X^2+Y^2+Z^2+1)$$

超球面の投影.cg3

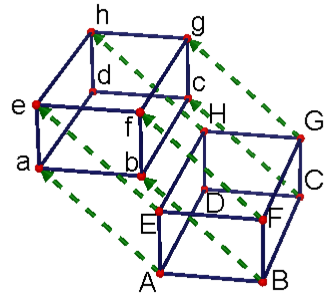
超球面の投影.nb

超平面u=tによる断面を利用した中心投影の作図

4次元物体Vの超平面 $u=t$ による3次元断面をT,
原点を中心とした $1/t$ 倍の相似変換を f とすると,
Tの f による像T'の通過領域が, Vの中心投影となる.

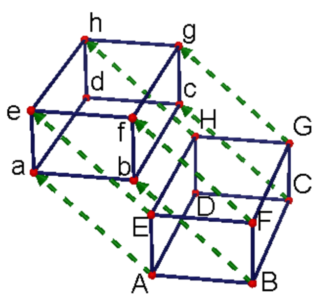
§4. 超直方体

§ 4-1. 超直方体の定義



３次元空間V内の直方体を, 4次元空間内でV に直交する方向に平行移動してできる立体を超直方体と定める．以下, Vに属さない辺やベクトルは点線で, V内の辺やベクトルは実線で表す．また平行移動する前の頂点は大文字のA,B,C⋯で，これらを平行移動した点は小文字のa,b,c,⋯で表す．

1 辺が 1 の超立方体(Tesseract) は, 例えば 次のような座標で与えられる.
A(0,0,0,0), B(1,0,0,0),C(1,1,0,0),D(0,1,0,0),E(0,0,1,0), F(1,0,1,0),G(1,1,1,0),H(0,1,1,0)
a(0,0,0,1), b(1,0,0,1), c(1,1,0,1), d(0,1,0,1), e(0,0,1,1), f(1,0,1,1), g(1,1,1,1), h(0,1,1,1)



¿Question?
超直方体の頂点，辺，面，胞(超表面上の立体)の数は?

直方体の頂点,辺,面の数を v(vertex), e(edge), f(face) とすると，超直方体の

頂点の数 V は,
辺の数 E は,
面の数 F は,
胞の数 C は,

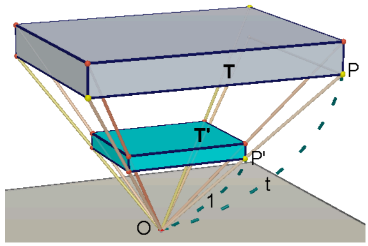
胞 (cell) は, 超直方体の 4 つの軸に関し 2 室ずつできる．例えば,

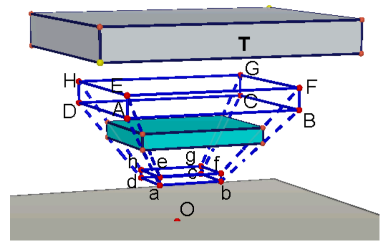
$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le z \le 1, \quad 0 \le u \le 1$$

の場合は, 超表面 $u = 0$ と $u = 1$ 上に, 次の 3 次元立体(胞)ができる.

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le z \le 1$$

§ 4-2. 超直方体の中心投影



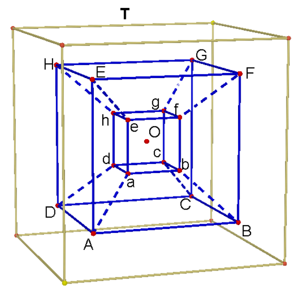


面

超直方体S $(u_1 \leq u \leq u_2)$ の超平面 $u = t$ $(u_1 \leq t \leq u_2)$ による断面 T は, 3次元の直方体で, t によらない.
この直方体を, 原点中心の相似変換:

$$X = x/t,\quad Y = y/t,\quad Z = z/t$$

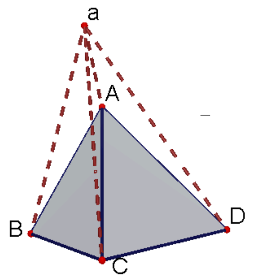
で移した直方体を T_t' とすると, T_t' の通過領域Kが S の中心投影となる. Kは多面体となり, 特別な場合には, T_{u_i}' が T_{u_j}' の内部に含まれる.

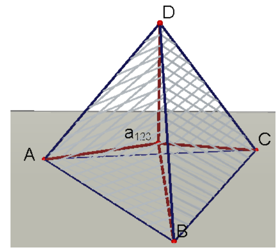


超直方体の射影.cg3

§ 5. 超4面体

§5-1. 超4面体の定義





定義.cg3

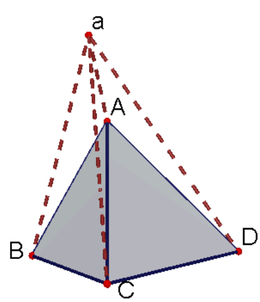
3 次元空間V内の三角錐の頂点と, 4次元空間内でV にない点 とを結んできる立体を超4面体と定める.

【例1】A,B,C,Dが 超平面 $u=0$上にある 1 辺が $3\sqrt{2}$ の 超正4面体.

$\mathrm{A}(2\sqrt{2},0,0,0)$, $\mathrm{B}(-\sqrt{2},-\sqrt{6},0,0)$, $\mathrm{C}(-\sqrt{2},\sqrt{6},0,0)$, $\mathrm{D}(0,0,4,0)$, $\mathrm{a}(0,0,1,\sqrt{15})$

【例2】A,B,C,Dが 超平面 $x+y+z+u=2$上にある 1 辺が $2\sqrt{2}$ の 超正4面体

$\mathrm{A}(2,0,0,0)$, $\mathrm{B}(0,2,0,0)$, $\mathrm{C}(0,0,2,0)$, $\mathrm{D}(0,0,0,2)$, $\mathrm{a}(1-\tau,1-\tau,1-\tau,1-\tau)$ (τ は黄金比)



¿Question?
超4面体の頂点, 辺, 面, 胞(超表面上の立体)の数は?

4面体の頂点,辺,面の数を v(vertex), e(edge), f(face) とすると, 超4面体の

頂点の数V は,

辺の数E は,

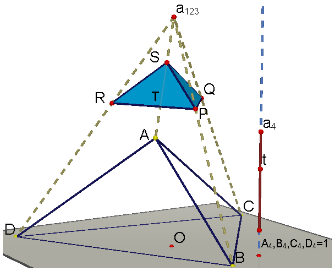
面の数F は,

胞の数C は,

胞 (cell) は, 具体的には, A-BCD, a-ABC, a-ABD, a-ACD, a-BCD の5室

§ 3-2. 超4面体の(u=1上への)中心投影

[1]B,C,Dのz成分が0の時，u=tによる断面の直投影



[1]$u=1$上の四面体A-BCDと$u \neq 1$上の1点aを結んで出来る超四面体をVとする． t が a_u と1を $m:n$ に内分する時，超平面 $u=t$ と線分aA の交点を(x,y,z)空間へ直投影した点Sは，aの直投影(a_{123})とAを $m:n$ に内分した点となる．故に，Vの $u=t$ による断面 T は，点a_{123}を中心に A-BCDを $m/(m+n)$倍に 拡大した四面体P-QRSとなる．

[2]この四面体を，原点中心の相似変換:

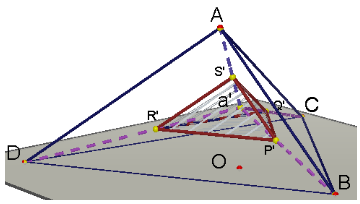
$$X=x/t,\ \ Y=y/t,\ \ Z=z/t \quad \cdots(*)$$

で移した四面体をP'-Q'R'S'，点a_{123}の$u=1$上への中心投影をa'とすると，P'-Q'R'S'は，a'を中心に$m/(m+n \cdot a_u)$倍に拡大した四面体となる．

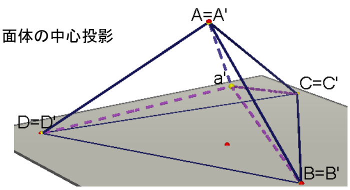
[3]tを変化させた時，P'-Q'R'S'の通過領域が Vの中心投影．

5胞体の切断と射影.cg3

[2]断面の直投影を中心投影した四角すいの
頂点は，線分a' A, b' B,c' C, d' D上にある．



[3]超四面体の中心投影



まとめ

中心投影では，形は歪むが，全体像が見える．(例．超球面と外接3次元空間)

u=t による断面が容易に求まる場合は，Cabri-3Dでも，投影を，かなりの程度 見る事が可能．