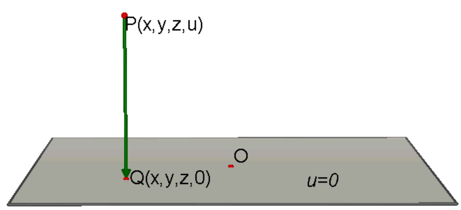
超立方体の展開図

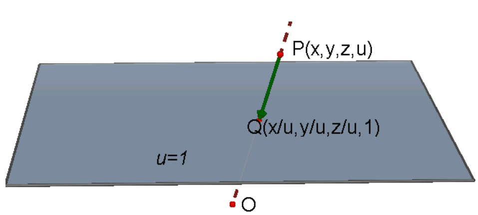
Cabri 研究会　2012年1月9日
生越　茂樹

§1. 4次元立体の 3次元への投影



$\mathrm{P}(x, y, z, u)$ の 超平面 $u=0$ への直投影を $\mathrm{Q}(X, Y, Z, U)$ とすると,

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y \\ Z = z \\ U = 0 \end{cases}$$



$\mathrm{P}(x, y, z, u)$ の, 原点から 超平面 $u=1$ 上への中心投影を $\mathrm{Q}(X, Y, Z, U)$ とすると,

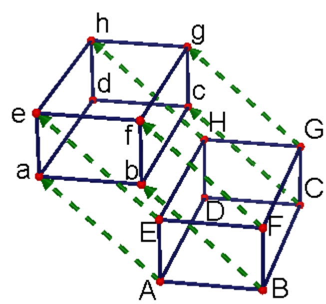
$$\begin{cases} X = \dfrac{x}{u} \\ Y = \dfrac{y}{u} \\ Z = \dfrac{z}{u} \\ U = 1 \end{cases}$$

超平面 u=t による断面が分かれば，1/t倍の相似変換により，中心投影が作成できる．

超平面*u=t*による断面を利用した中心投影の作図

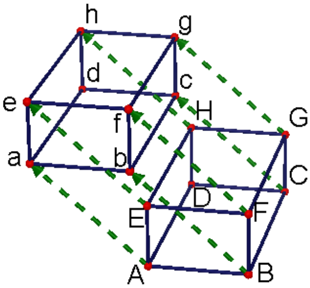
4次元物体Vの超平面 $u = t$ による3次元断面をT,
原点を中心とした $1/t$ 倍の相似変換を f とすると,
Tの f による像T'の通過領域が, Vの中心投影となる.

§1-1. 超直方体の定義



３次元空間V内の直方体を, 4 次元空間内で V に直交する方向に平行移動してできる立体を超直方体と定める．以下, V に直交する辺やベクトルは点線で, V内の辺やベクトルは実線で表す．また平行移動する前の頂点は大文字のA,B,C…で，これらを平行移動した点は小文字の a,b,c,…で表す.

1 辺が 1 の超立方体(Tesseract) の頂点は, 例えば, 次の座標で与えられる.
A(0,0,0,0), B(1,0,0,0),C(1,1,0,0),D(0,1,0,0),E(0,0,1,0), F(1,0,1,0),G(1,1,1,0),H(0,1,1,0)
a(0,0,0,1), b(1,0,0,1), c(1,1,0,1), d(0,1,0,1), e(0,0,1,1), f(1,0,1,1), g(1,1,1,1), h(0,1,1,1)



¿Question?
超直方体の頂点，辺，面，胞(超表面上の立体)の数は?

直方体の頂点,辺,面の数を v(vertex), e(edge), f(face) とすると，超直方体の

頂点の数V は,

辺の数E は,

面の数F は,

胞の数C は,

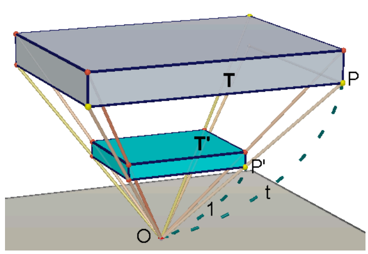
胞 (cell) は, 超直方体の 4 つの軸に関し 2 室ずつできる．例えば,

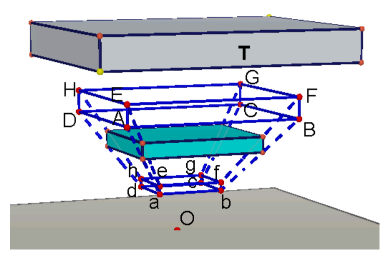
$$0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1,\quad 0\le z\le 1,\quad 0\le u\le 1$$

の場合は, 超表面 $u=0$ と$u=1$ 上に, 次の 3 次元立体(胞)ができる．

$$0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1,\quad 0\le z\le 1$$

§ 1-2. 超直方体の中心投影

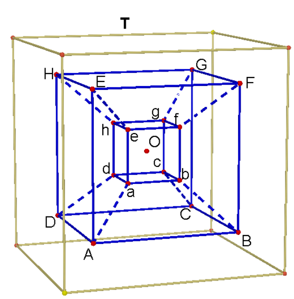




超直方体S $(u_1\le u\le u_2)$ の超平面 $u=t$ $(u_1\le t\le u_2)$
による断面 T は, 3次元の直方体で， t によらない.
この直方体を, 原点中心の相似変換:

$$X=x/t,\quad Y=y/t,\quad Z=z/t$$

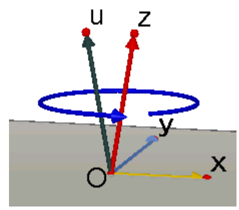
で移した直方体を T_t' とすると，T_t' の通過領域
Kが S の中心投影となる．Kは多面体となり，
特別な場合には，T_{u_i}' が T_{u_j}' の内部に含まれる.



超直方体の投影.cg3

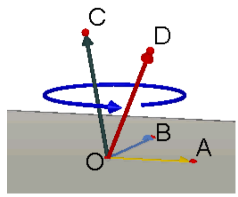
§2. 4次元空間内の回転

4次元空間の回転では，平面を軸とした回転となる.（軸となる平面上の点は動かない.)



xy平面上の($\Longleftrightarrow$ zu平面が軸の) θ の回転を表す行列は,

$$R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

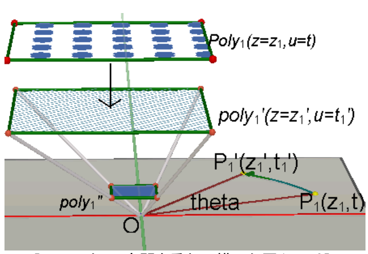


$\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ が, 4次元空間で正規直交基底をなす時,
平面OAB上の ($\Longleftrightarrow$平面OCDが軸の) θ の回転を表す行列は,

$$R(\theta)=P\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}$$

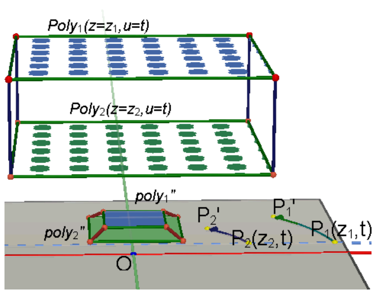
ただし, $P=\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)$

§2-1. xy平面を軸とする回転



[zu平面とxyz空間を重ねて描いた図（同下）]

超平面$u=t$上の $z=z_1$の多角形Aを, xy平面を軸に ($\Longleftrightarrow$ zu 平面上で) θ 回転させる. zu平面上で点$\mathrm{P}_1(z_1,t)$を θ 回転した点を$\mathrm{P}_1'(z_1',t_1')$とすると, Aを, 中心投影したA"の作図は,
「Aをz軸方向に$z=z_1'$になるまで平行移動し,
さらに O中心の$1/t_1'$ 倍の拡大」$\cdots$(*)
をすれば良い.



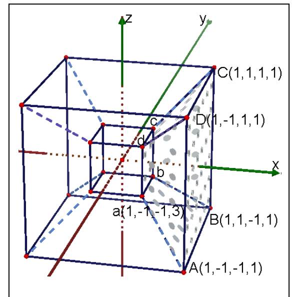
$u=t$ 上の 直方体T (上&下面は $z=z_1$ と $z=z_2$上) をzu 平面上でθ 回転させる. ところが $\mathrm{P}_1(z_1,t)$ と $\mathrm{P}_2(z_2,t)$ の u 成分は等しいが, その像 $\mathrm{P}_1'(z_1',t_1')$ と $\mathrm{P}_2'(z_2',t_2')$の u 成分は異なるので, (*)の拡大率も異なる. 故に Tの中心投影T"は 四角錐台となる. さらに, t_i'が変化すると T"の大きさも変わり, t_i'が 0 に近くなるにつれ, 無限大に近づく.

超直方体のzu平面周りの回転.cg3

§ 3. 超立方体の標準的な展開図

1辺2の超立方体V「$-1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1,\ -1\le z\le 1,\ 1\le u\le 3$」上の頂点を, A(1,−1,−1,1), B(1,1,−1,1), a(1,−1,−1,3), b(1,1,−1,3) ⋯ とする．yz平面を軸とする回転を表す行列 $R(\theta)$ は,

$$R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}$$



[u=1の上への中心投影]

さらに「$f_\theta\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)=R(\theta)\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\overrightarrow{\mathrm{OA}}$」と定めると，$f_\theta$ は平面ABDの周りの θ の回転を表す. 特に $\theta=-90^\circ$の時は,

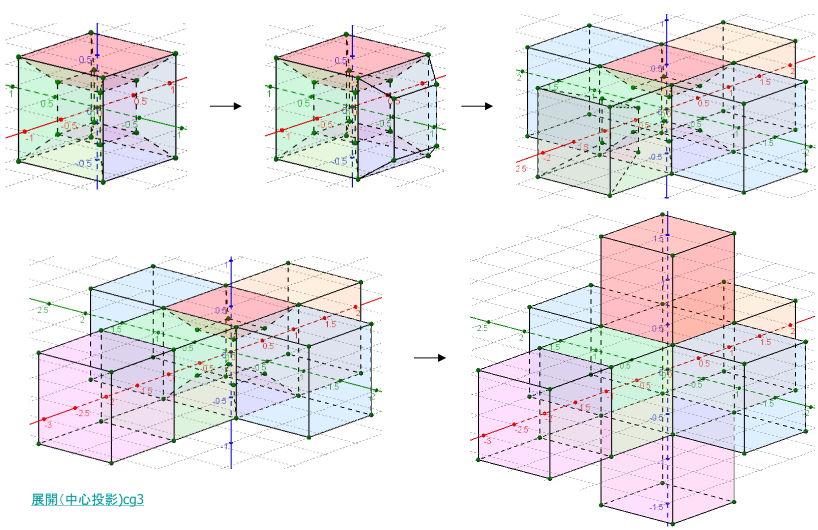
$$R(\theta)\ \overrightarrow{\mathrm{Aa}}=R(-90^\circ)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \therefore \overrightarrow{\mathrm{Oa}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{Aa}}\xrightarrow{f_\theta}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

即ち u 軸方向への平行移動が, x 軸方向への平行移動に変わる． b,c,⋯に関しても同様だから, 胞「$x=1,\ -1\le y\le 1,\ -1\le z\le 1,\ 1\le u\le 3$」は「$1\le x\le 3,\ -1\le y\le 1,\ -1\le z\le 1,\ u=1$」に移る. この様な回転の繰り返しで, Vの全ての胞を, 超平面 $u=1$ 上に展開できる.

(以下 $\boxed{3.5}$ までは，この様にして作成した展開図を，様々な投影法で見ただけ.)　超直方体の展開図.ggb

§ 3-1. 超平面u=1上への中心投影

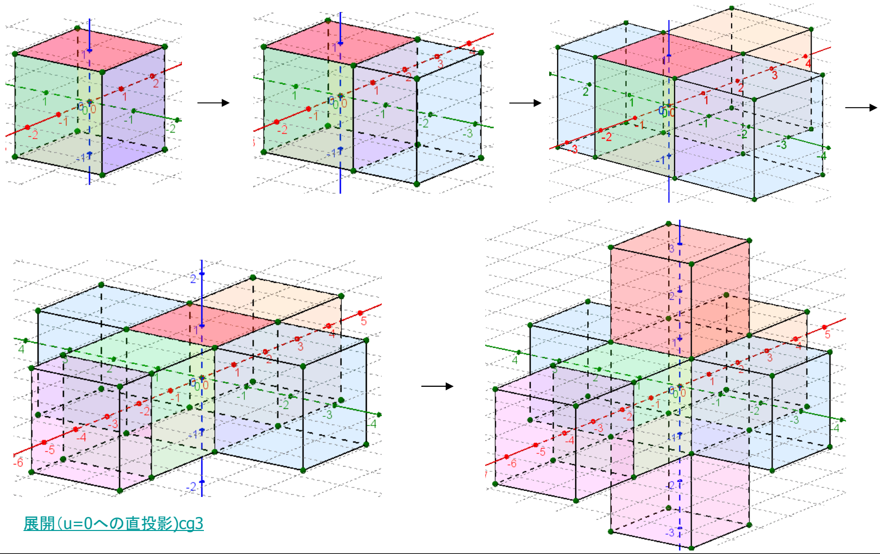
1 辺の長さは 2 の超立方体で，胞ABCDEFGHは $u=1$上に，胞abcdefghは $u=3$上にある．
中心投影により，後者は前者を「Oを中心に1/3倍に拡大した図形」となる．
これを展開すると，胞ABCDEFGHに含まれる胞が外に出てきて「十字架」が出来る．



展開(中心投影)cg3

§ 3-2. 超平面u=0上への直投影

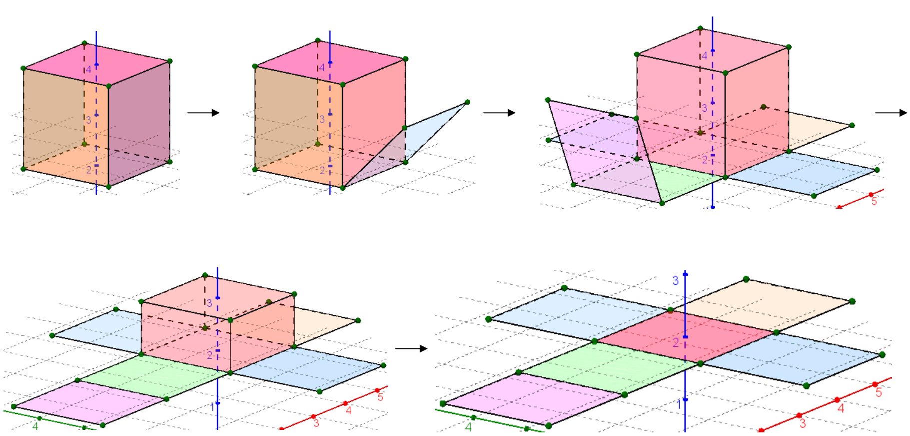
「$(x,y,z,u)\to(x,y,z)$」で投影．中心投影と似ているが，元の超立方体の胞は重なって一個しか見えない．入れ子細工を見ている感じがする．



展開(u=0への直投影)cg3

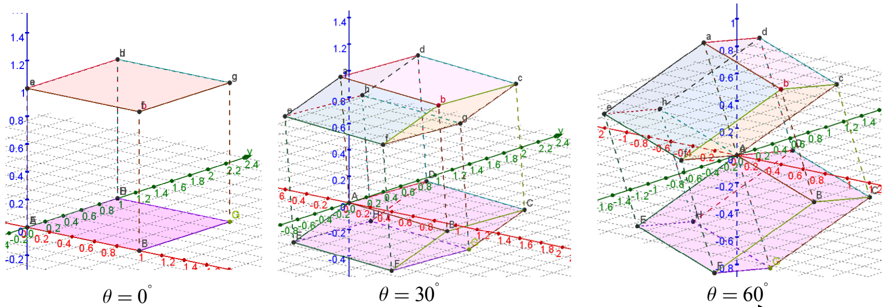
§ 3-3. 超平面z=0上への直投影

「$(x,y,z,u)\to(x,y,u)$」で投影．u 軸は，z 軸を代用．この展開は「$u=1$ の上への展開」なので，投影図は 平面 $u=1$ 上に, 2次元的に広がる．



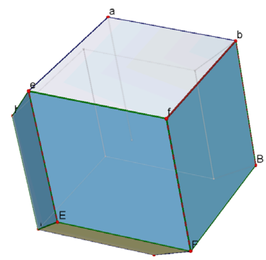
展開(z=0への直投影)cg3

§ 3-4.超立方体の「標準的な直投影」



[対角線Ogがz軸方向になる様に回転]

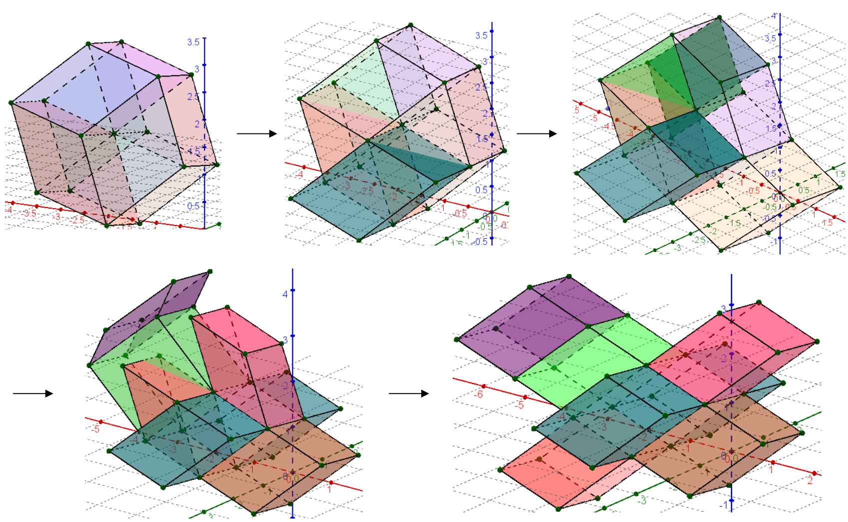
頂点Aが原点で，辺がx, y, z, u軸上に有る単位立方体の
Aから最も遠い点は g(1,1,1,1)で，Agは対角線の1つとなる.
この立方体を,Agが E(0,0,1,0)を通るように平面OgE上で
回転させ, 超平面z=0上に直投影すると, 1辺が$\sqrt{3}/2$の菱形
12面体になる.　これが「立方体の標準的な直投影」となる.
「対角線と垂直な超平面に直投影した像」と同じ.



§ 3-5.「標準的な直投影」で見た展開図

超直方体Vの展開を,「対角線と垂直な超平面に直投影」して見る. 1つの胞を回転して「外」へ出しても, しばらくの間は, 残った胞と重なり合って見える.

菱形12面体の展開.cg3

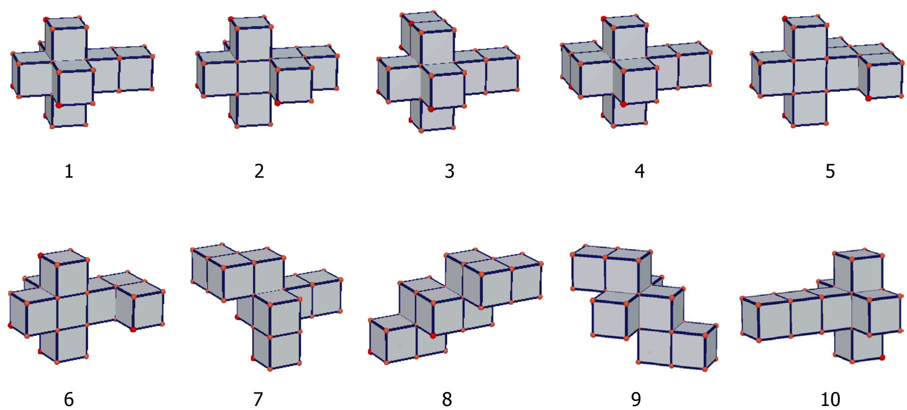


§4. その他の展開図

標準的な展開図以外にも様々な展開図がある．下はその一例.　　様々な展開図.cg3

(1~8 は「高次元図形サイエンス, 京都大学出版会」より抜粋. 9,10 は自作.)

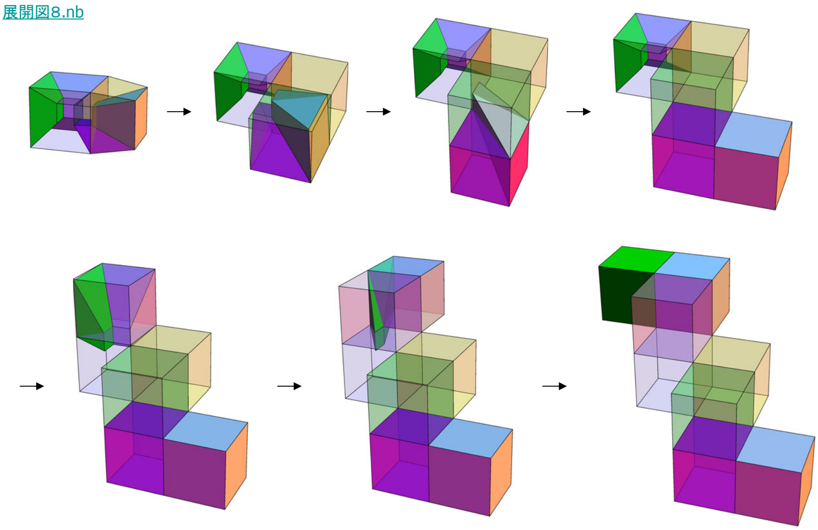
Mathematicaで作成した展開図から2つの例を挙げる. (他の例は ファイルをご覧ください.)



§4-1.「展開図8」の中心投影

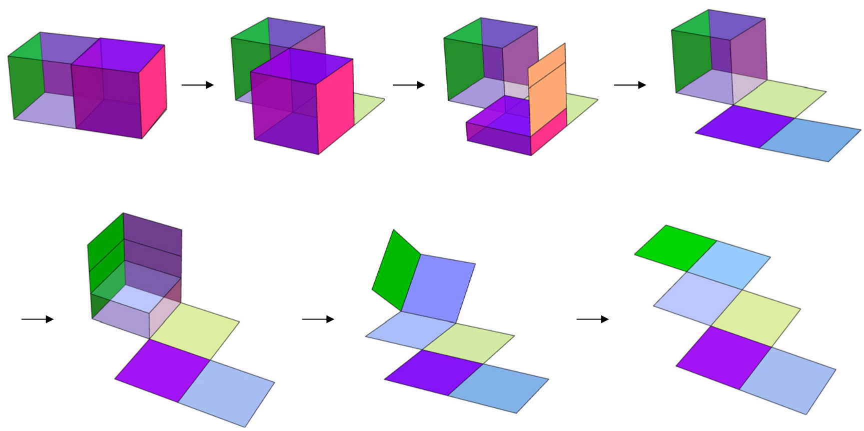
一度に1室ずつ回転したら標準的な展開図になる．以下の図は，u=1上の胞ABCDEFGH以外の7 室を4室と3室に分け，前者をまず平面ABFEに関して回転，後者を平面ABCDに関し回転して作成した.

展開図8.nb



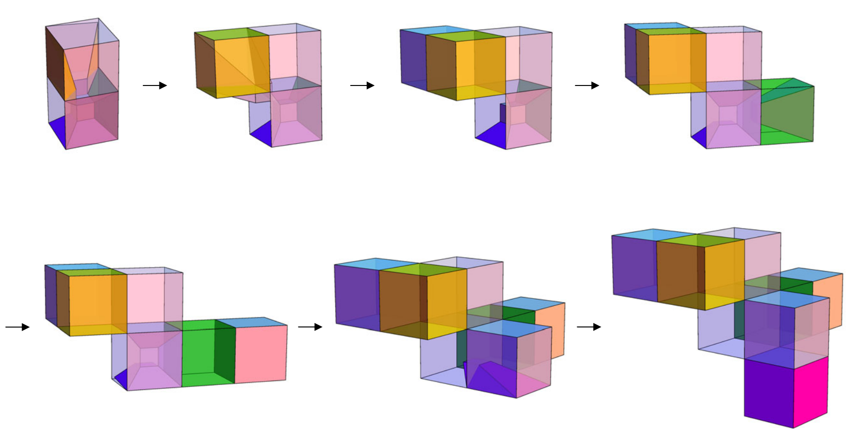
§ 4-2.「展開図8」のz=0の上への直投影

「$u=1$ の上への展開」なので，投影図は 平面 $u=1$ 上に, 2次元的に広がる.



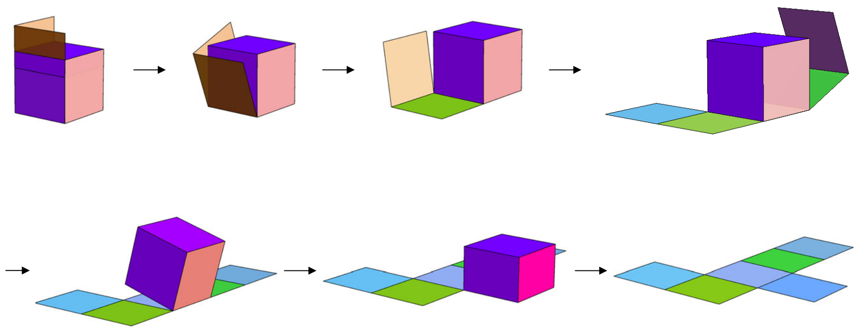
§ 4-3.「展開図7」の中心投影

u=1上の胞ABCDEFGH以外の7 室を, 3室と2室と2室に分け, 3室をまず平面ABCDに関して回転, 2つの2室は平面CDHGと平面BDFGに関し回転して作成した.   展開図7.nb



§4-4.「展開図7」のz=0の上への直投影

「$u=1$ の上への展開」なので，投影図は 平面 $u=1$ 上に, 2次元的に広がる.



まとめ

超直方体の2つの胞は，1つの平面を共有する.
この平面を軸とする回転を繰り返す事によって,
超直方体を，超平面上に展開できる. 超角錐,
正多胞体などの超多面体でも，同様に展開可能.

展開の過程は，投影法によって全く違って見える.
また，最終的な展開図形も，色々な形がある.