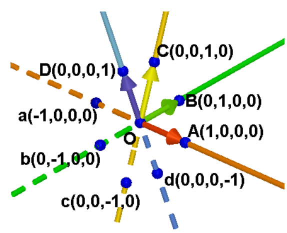
正16胞体の
投影図,展開図

Cabri 研究会　2012年4月8日
生越　茂樹

§1. 頂点,辺,面,胞

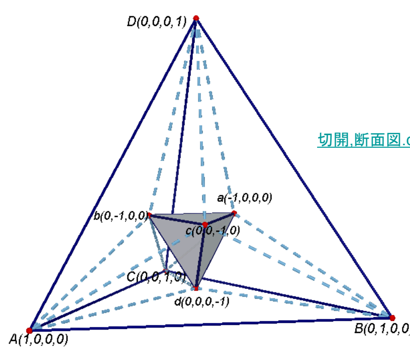
座標軸上の8点A(1,0,0,0), B(0,1,0,0), C(0,0,1,0), D(0,0,0,1), a(−1,0,0,0), b(0,−1,0,0), c(0,0,−1,0), d(0,0,0,−1)を頂点,
各々の点Xと，Xと異なる軸上の点Yを結ぶ線分を辺とする超立体を考える. この時, 各頂点から6本の辺が出て,
A_i, B_j, C_k, D_l を頂点とする 2^4個の正四面体が胞となる.
(但し $i = 0,1$, $A_1 = \mathrm{A}$, $A_2 = \mathrm{a}$とする．B_j, C_k, D_l も同様)



即ち, この超多面体の,

頂点の数は,	8個,
辺の数は,	$8\times 6(\text{本})\times\frac{1}{2}=24$本,
面の数は,	$16\times 4(\text{面})\times\frac{1}{2}=32$面,
胞の数は,	16室

となり，全ての頂点は対等である.
このような胞体を 正16胞体 という.

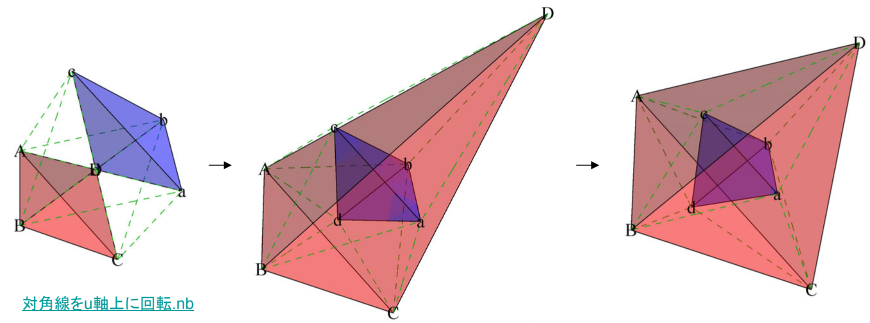


切開,断面図.cg3

§2. 投影図

A, B, C, Dは，超平面 $x+y+z+u=1$上に，a, b, c, d は，超平面 $x+y+z+u=-1$上にある．よって$\vec{n}=(1,1,1,1)$が $\vec{m}=(0,0,0,1)$になるように O$\vec{n}\vec{m}$平面上で回転させ, u 軸方向に適当に移動すると , A,B,C,Dは超平面 $u=k$ $(k>1)$上に，a,b,c,d は $u=k+1$ 上に移る．これを「Oを中心とする $u=1$ の上への中心射影」で見ると, (x,y,z)空間で中心が (0,0,0)，相似比が $(k+1):(-k)$ の正四面体ABCDと正四面体abcdが見える．

$\left(\text{例えば, A,aの中心射影をそれぞれ A', a'とすると, 3次元空間で, } \overrightarrow{\mathrm{Oa}'}=-\dfrac{k}{k+1}\overrightarrow{\mathrm{OA}'}\right)$



対角線をu軸上に回転.nb

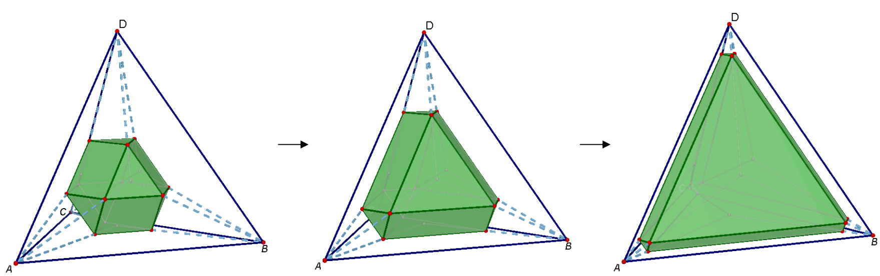
§3. 断面図

§1の正16胞体を , §2で述べた様に回転&移動すると,

$\mathrm{A}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{\sqrt{3}}{6},k\right)$, $\mathrm{B}\left(0,\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{6},k\right)$, $\mathrm{C}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{\sqrt{3}}{6},k\right)$, $\mathrm{D}\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2},k\right)$,

$\mathrm{a}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{\sqrt{3}}{6},k+1\right)$, $\mathrm{b}\left(0,-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{3}}{6},k+1\right)$, $\mathrm{c}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{\sqrt{3}}{6},k+1\right)$, $\mathrm{d}\left(0,0,-\frac{\sqrt{3}}{2},k+1\right)$

のような超立体に移せる．これを, 超平面 $u=t$ で切った断面は14面体
(正三角形8面&長方形6面)となる.（下図は $k=1/3$ の時, $u=1$ の上への中心投影)



切開,断面図.cg3

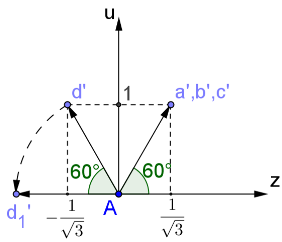
§4. 展開図 (例1)

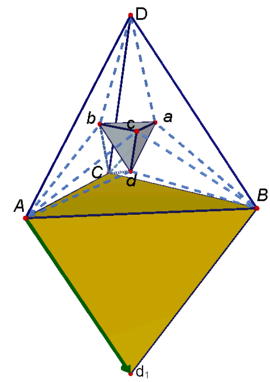
§3の様に, 超平面 $u=k$ 上に A,B,C,D, $u=k+1$ 上に a,b,c,d が来る様に回転, 平行移動した

正 16 胞体の座標は, $\mathrm{A}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{\sqrt{3}}{6},k\right)$, $\mathrm{B}\left(0,\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{6},k\right)$, $\mathrm{C}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{\sqrt{3}}{6},k\right)$,

$\mathrm{D}\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2},k\right)$, $\mathrm{a}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{\sqrt{3}}{6},k+1\right)$, $\mathrm{b}\left(0,-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{3}}{6},k+1\right)$, $\mathrm{c}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{\sqrt{3}}{6},k+1\right)$, $\mathrm{d}\left(0,0,-\frac{\sqrt{3}}{2},k+1\right)$

平面ABCの直交補空間は uz平面. 点dのuz平面への
正射影をd'と表すと 「$\overrightarrow{\mathrm{Ad'}}$ の z 成分 $=-1/\sqrt{3}$, u 成分 $=1$」
故に, 胞ABCdを平面ABCを軸に 60° 回転すると,
超平面 $u=k$ 上の胞$\mathrm{ABCd_1}$ に展開される. (左下図)



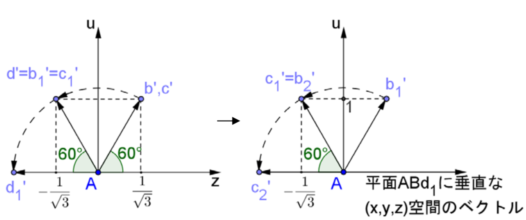


①前頁の回転で, 胞ABcd, Abcdも同時に動かしたとし, b,cの像を $\mathrm{b_1,c_1}$ とする.
この時, $\mathrm{b_1,c_1}$のzu成分は$\left(-1/\sqrt{3},1\right)$で, x,y成分は変化しない.

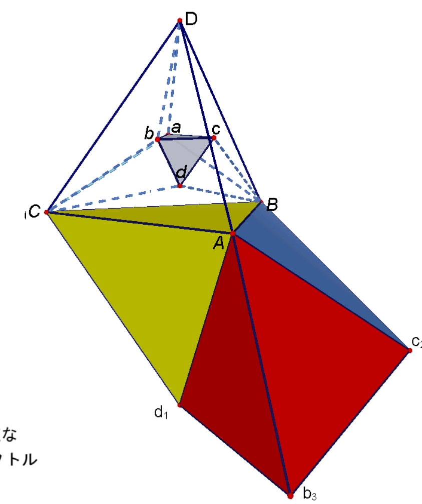
②次に胞$\mathrm{ABc_1d_1}$, $\mathrm{Ab_1c_1d_1}$を, 平面$\mathrm{ABd_1}$を軸に60° 回転すると, 胞$\mathrm{ABc_1d_1}$ は
超平面$u=k$ 上の胞$\mathrm{ABc_2d_1}$ に展開される.

③さらに 胞$\mathrm{Ab_2c_2d_1}$を, 平面$\mathrm{Ac_2d_1}$を軸に
60° 回転すると, 超平面$u=k$
上の胞$\mathrm{Ab_3c_2d_1}$に展開される.

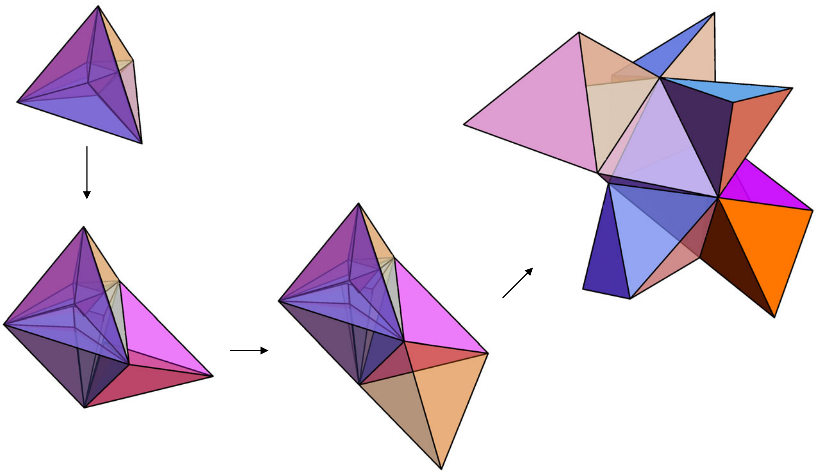
④同様にして, 全ての胞は 超平面
$u=k$上に展開される. (次頁)



ステップ①　　ステップ②



正16胞体の展開図 (例1)



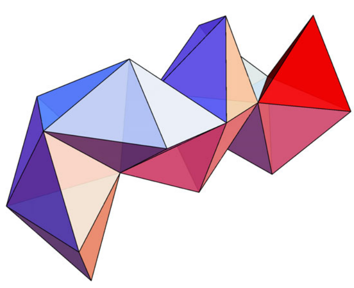
developement1.nb

§5. 様々な展開図

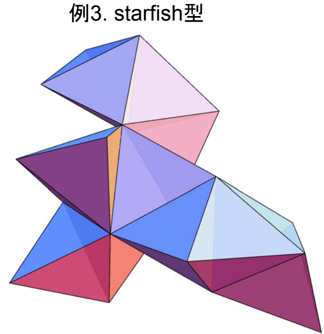
3次元空間内で，同一平面上にない面Xと面Yが 辺 l を共有する時, l を軸とする回転で, YをXと同じ平面上に展開できる．　snake.cg3　starfish.cg3

同様, 4次元空間内で, 同一超平面上にない 胞XとYが 面 S を共有するとき, S を軸とする回転で , Yを Xと同じ超平面上に展開できる．従って，面の共有関係を調べるだけで, 胞を展開する事ができる.

例2. snake型



例3. starfish型

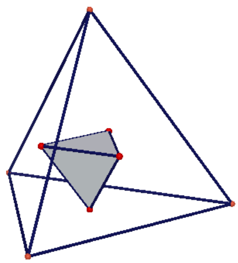


random_developement.nb
(「Shift + Enter」 を押す毎に, 新しい展開図が作られます.)

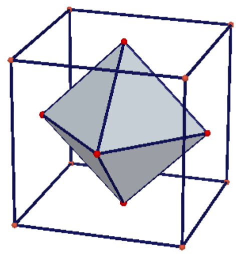
§6. 双対性

3次元の多面体XとYにおいて，Xの各面の中心をYの頂点, Xの隣り合う2面の中心を結ぶ辺をYの辺とした立体Yを, Xと双対という. 例えば 正4面体と正4面体, 正6面体と正8面体, 正12面体と正20面体は 双対となる.

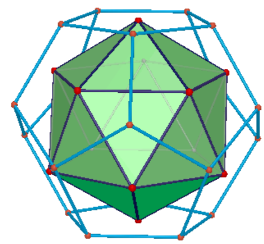
	頂点の個数	辺の本数	面の枚数
正4面体	4	6	4
正6面体	8	12	6
正8面体	6	12	8
正12面体	20	30	12
正20面体	12	30	20



正4面体と正4面体.cg3



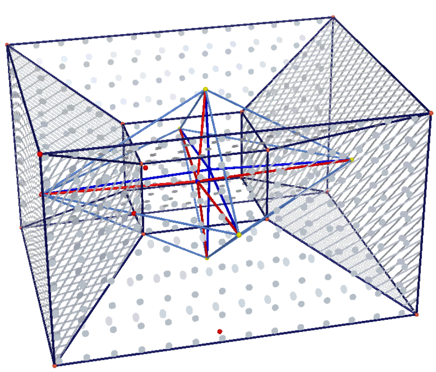
正6面体と正8面体.cg3



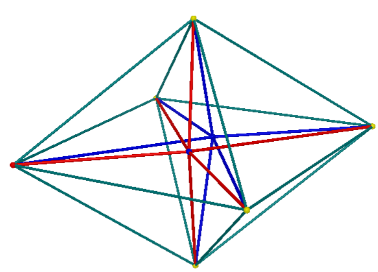
正12面体と正20面体.cg3

4次元の超多面体XとYにおいて，Xの各胞の中心をYの頂点, Xの隣り合う2胞の中心を結ぶ辺をYの辺とした立体Yを, Xと双対という. 例えば 正5胞体と 正5胞体, 正8 胞体と 正16 胞体は互いに 双対となる. 8胞体と16胞体.cg3 16cells.wrl

	頂点の個数	辺の本数	面の枚数	胞の室数
正5胞体	5	10	10	5
正8胞体	16	32	24	8
正16胞体	8	24	32	16



正8胞体と16胞体



16胞体