

6 【解答】途中まで5と同じ。mと円錐の側面との交点をP,Qとすると、5より、

$$PQ = \frac{2}{\sqrt{3}}|2\sin\theta - 1| \quad \dots ①$$

次に、直線PQにおける円柱の接平面を π とすると、

$$\pi : \cos\theta y + \sin\theta z = 1 \quad \dots ②$$

π と $A(0,0,2)$ との距離を h とすると、 h は yz 平面における直線 $\cos\theta y + \sin\theta z - 1 = 0$ と点 $A(0,0,2)$ との距離と等しいから

$$h = \frac{|2\sin\theta - 1|}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}} = |2\sin\theta - 1| \quad \dots ③$$

平面 $\pi(\theta)$ を、直線 $m(\theta)$ と $A(0,0,2)$ で定まる平面とし、 K のうち、 $\pi(\theta)$ と $\pi(\theta + \Delta\theta)$ で囲まれる部分の体積を ΔV とすると、 $\Delta\theta > 0$ のとき

$$\Delta V = \frac{1}{3} \times (PQ \times 1 \cdot \Delta\theta) \times h = \frac{2}{3\sqrt{3}}(2\sin\theta - 1)^2 \Delta\theta \quad \dots ④$$

よって

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3\sqrt{3}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2\sin\theta - 1)^2 d\theta \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9} \pi - 2 \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

