12 【解答】 (1)

$$\left\{\frac{\sin\theta}{(2+\cos\theta)^n}\right\}' = \frac{\cos\theta(2+\cos\theta)^n - \sin\theta\times n(2+\cos\theta)^{n-1}(-\sin\theta)}{(2+\cos\theta)^{2n}}$$
$$= \frac{\cos\theta(2+\cos\theta)+n\sin^2\theta}{(2+\cos\theta)^{n+1}}$$
$$= \frac{2\cos\theta+n-(n-1)\cos^2\theta}{(2+\cos\theta)^{n+1}} \qquad \cdots(答)$$

(2) (1) の式は $n=0$ の時も成り立つから、$n=1,2,3\cdots$ のとき、

$$\left\{\frac{\sin\theta}{(2+\cos\theta)^{n-1}}\right\}' = \frac{2\cos\theta+(n-1)-(n-2)\cos^2\theta}{(2+\cos\theta)^n}$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos\theta+(n-1)-(n-2)\cos^2\theta}{(2+\cos\theta)^n}d\theta = \left[\frac{\sin\theta}{(2+\cos\theta)^{n-1}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \cdots①$$

一方

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos\theta+(n-1)-(n-2)\cos^2\theta}{(2+\cos\theta)^n}d\theta$$
$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(2+\cos\theta)^n}d\theta + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{(2+\cos\theta)^n}d\theta - (n-2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta}{(2+\cos\theta)^n}d\theta$$
$$= (n-1)I_n + 2J_n - (n-2)K_n \qquad \cdots②$$

①,② より

$$(n-1)I_n + 2J_n - (n-2)K_n = \frac{1}{2^{n-1}} \quad (答) \qquad \cdots③$$

(3)

$$2I_{n+1} + J_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2+\cos\theta}{(2+\cos\theta)^{n+1}}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(2+\cos\theta)^n}d\theta = I_n \qquad \cdots④$$
$$K_{n+1} - 4I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta-4}{(2+\cos\theta)^{n+1}}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta-2}{(2+\cos\theta)^n}d\theta = J_n - 2I_n \qquad \cdots⑤$$

③,④,⑤ より ,

$$3(n+1)I_{n+2} - (4n+2)I_{n+1} + nI_n = -\frac{1}{2^{n+1}} \ (n=1,2,3\cdots) \qquad \cdots⑥$$

問題 11 と同様にして (略)

$$I_1 = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi \qquad \cdots(答)$$

I_0 を適当に定義すれば,⑥ は $n=0$ の時も成り立つ。$n=0,1,2$ を順に⑥ へ代入して

$$I_2 = \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi - \frac{1}{6},\ I_3 = \frac{\sqrt{3}}{18}\pi - \frac{5}{24},\ I_4 = \frac{11\sqrt{3}}{243}\pi - \frac{5}{24} \qquad \cdots(答)$$

Comment

⑥ は $n<0$ の時も成り立ちます。