

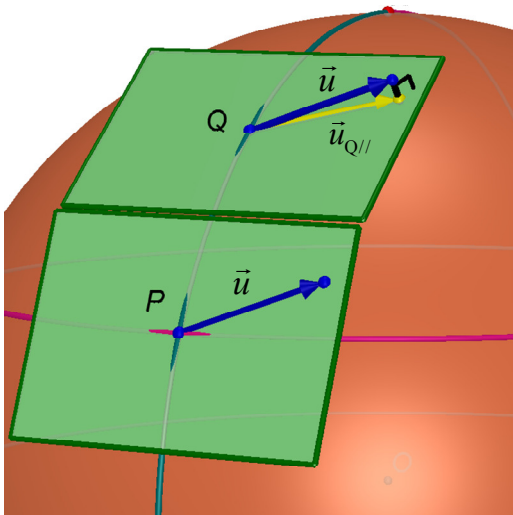
$R^3$ 内の曲面に於ける  
「平行移動」  
(相対論への準備として)

2014年7月  
Cabri研究会  
生越 茂樹

(HD画質で作成してあります)

## § 1. 平行移動の図形的定義

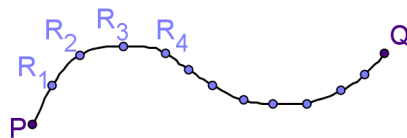
2点  $P, Q$  が曲面上にあり, その曲面上の距離を  $d(P, Q)$  とする.  $\vec{u}$  を  $P$  における接ベクトルとし, 「 $\vec{u}$  を  $\mathbb{R}^3$  内で  $Q$  に平行移動し, さらに  $Q$  に於ける接平面に正射影したベクトル」を  $\vec{u}_{Q//}$  とすると,  $P$  と  $Q$  が非常に近いとき,  $|\vec{u}|$  と  $|\vec{u}_{Q//}|$  の違いは  $d(P, Q)$  の2次の無限小となる.



一般に  $P$  と  $Q$  を結ぶ曲線を  $C$ ,  $C$  を細かく分割した点を順に  $P, R_1, R_2, \dots, Q$  とし, 上の様に次々に,  $\vec{u}$  を  $Q$  まで移動する.

この時, 分割の幅を限りなく小さくした極限を考えると,  $\vec{u} \rightarrow \vec{u}_{R_1//} \rightarrow \vec{u}_{R_2//} \rightarrow \dots \rightarrow \vec{u}_{Q//}$  で定まる

$\vec{u}_{Q//}$  は, 経路  $C$  のみによって定まり, かつ  $|\vec{u}| = |\vec{u}_{Q//}|$  である. これを「 $\vec{u}$  を  $C$  に沿って  $Q$  まで平行移動したベクトル」と言う.

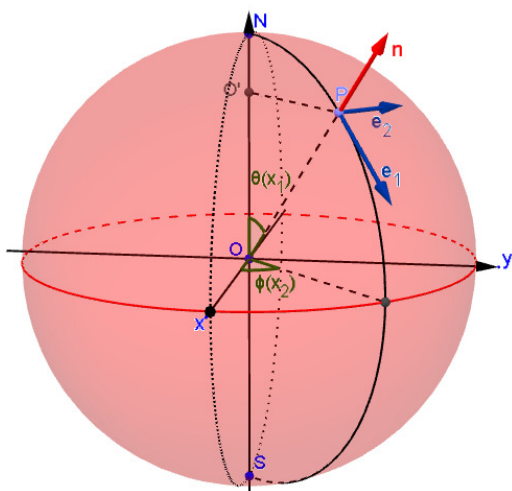


[図形的定義.cg3](#)

[緯線に沿った移動\(図形的\).cg3](#)

## § 2. 平行移動の式

### 単位球での例



単位球上の点をP, その曲面座標  $\theta(x^1), \phi(x^2)$ を図の様に定めると,

$$\bar{p} \equiv \overline{OP} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

よって, P に於ける接平面の基底ベクトルとして, 次の  $\bar{e}_1, \bar{e}_2$  と法線ベクトル  $\bar{n}$  がとれる.

$$\bar{e}_1 \equiv \frac{d\bar{p}}{dx^1} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_2 \equiv \frac{d\bar{p}}{dx^2} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{n} \equiv \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

このとき,  $\bar{e}_1, \bar{e}_2$  の  $x^1, x^2$  による微分は,  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{n}$  で表される.

$$\frac{d\bar{e}_1}{dx^1} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \phi \\ -\sin \theta \sin \phi \\ -\cos \theta \end{pmatrix} = -\bar{n}, \quad \frac{d\bar{e}_2}{dx^1} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \bar{e}_2,$$

$$\frac{d\bar{e}_1}{dx^2} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \bar{e}_2,$$

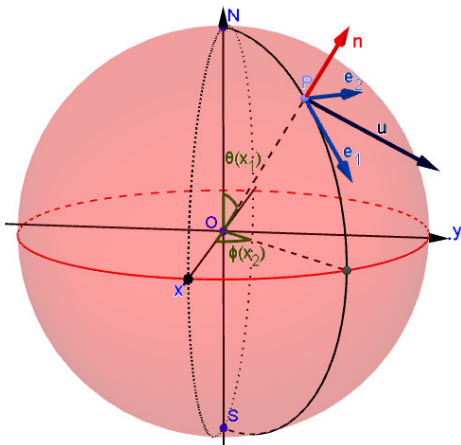
$$\frac{d\bar{e}_2}{dx^2} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \phi \\ -\sin \theta \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} = -\sin \theta \cos \theta \bar{e}_1 - \sin^2 \theta \bar{n}$$

一般に、曲面上の点 P に於ける接平面の基底ベクトル  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ , 法線ベクトル  $\vec{n}$  に対し,  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  の  $x^1, x^2$  による微分は,  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}$  で表され, 特に  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  の係数を christoffel 記号 (接続係数) と呼ぶ。

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_1}{dx^1} &= \Gamma_{11}^1 \vec{e}_1 + \Gamma_{11}^2 \vec{e}_2 + L\vec{n}, & \frac{d\vec{e}_2}{dx^1} &= \Gamma_{21}^1 \vec{e}_1 + \Gamma_{21}^2 \vec{e}_2 + M\vec{n}, \\ \frac{d\vec{e}_1}{dx^2} &= \Gamma_{12}^1 \vec{e}_1 + \Gamma_{12}^2 \vec{e}_2 + M\vec{n}, & \frac{d\vec{e}_2}{dx^2} &= \Gamma_{22}^1 \vec{e}_1 + \Gamma_{22}^2 \vec{e}_2 + N\vec{n} \end{aligned}$$

[単位球では,  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \cos\theta / \sin\theta$ ,  $\Gamma_{22}^1 = -\sin\theta \cos\theta$ ]

$$\left( \begin{aligned} \frac{d\vec{e}_1}{dx^1} &= -\vec{n}, & \frac{d\vec{e}_2}{dx^1} &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \vec{e}_2, \\ \frac{d\vec{e}_1}{dx^2} &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \vec{e}_2, & \frac{d\vec{e}_2}{dx^2} &= -\sin\theta \cos\theta \vec{e}_1 - \sin^2\theta \vec{n} \end{aligned} \right)$$



[上図は単位球で,  $X^1 = 1, X^2 = 1.5$ ]

P に於ける接ベクトル 「 $\vec{u} = X^1 \vec{e}_1 + X^2 \vec{e}_2$ 」 を,  $x_1$  正方向へ平行移動する時,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{dx^1} &= \frac{d}{dx^1} (X^1 \vec{e}_1 + X^2 \vec{e}_2) \\ &= \frac{dX^1}{dx^1} \vec{e}_1 + X^1 \frac{d\vec{e}_1}{dx^1} + \frac{dX^2}{dx^1} \vec{e}_2 + X^2 \frac{d\vec{e}_2}{dx^1} \\ &= \frac{dX^1}{dx^1} \vec{e}_1 + X^1 (\Gamma_{11}^1 \vec{e}_1 + \Gamma_{11}^2 \vec{e}_2 + L\vec{n}) + \frac{dX^2}{dx^1} \vec{e}_2 + X^2 (\Gamma_{21}^1 \vec{e}_1 + \Gamma_{21}^2 \vec{e}_2 + M\vec{n}) \\ &= \left( \frac{dX^1}{dx^1} + X^1 \Gamma_{11}^1 + X^2 \Gamma_{21}^1 \right) \vec{e}_1 + \left( \frac{dX^2}{dx^1} + X^1 \Gamma_{11}^2 + X^2 \Gamma_{21}^2 \right) \vec{e}_2 + (X^1 L + X^2 M) \vec{n} \end{aligned}$$

$\vec{u}$  を  $x^1$  方向に平行移動した時 「 $d\vec{u}/dx^1$  の接平面の成分=0」 だから,

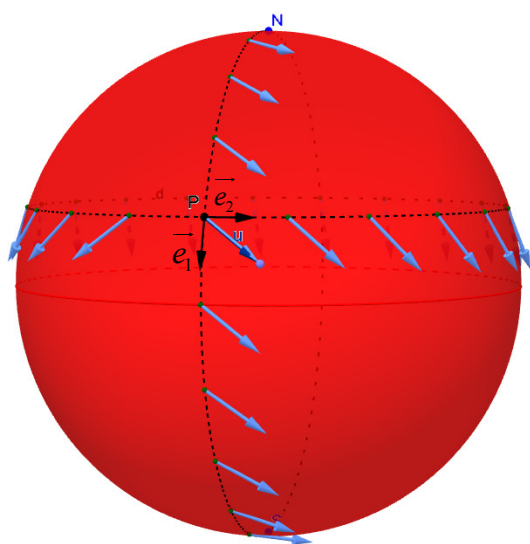
$$\frac{dX^1}{dx^1} + X^1 \Gamma_{11}^1 + X^2 \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \frac{dX^2}{dx^1} + X^1 \Gamma_{11}^2 + X^2 \Gamma_{21}^2 = 0 \quad (x^1 \text{ 正方向に平行移動})$$

同様に,  $\vec{u}$  を  $x^2$  方向に平行移動した時は,

$$\frac{dX^1}{dx^2} + X^1 \Gamma_{12}^1 + X^2 \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \frac{dX^2}{dx^2} + X^1 \Gamma_{12}^2 + X^2 \Gamma_{22}^2 = 0 \quad (x^2 \text{ 正方向に平行移動})$$

$\left( X^\alpha_{;\beta} \equiv \frac{dX^\alpha}{dx^\beta} + X^1 \Gamma_{1\beta}^\alpha + X^2 \Gamma_{2\beta}^\alpha \right)$  を,  $X^\alpha$  の  $x^\beta$  に関する 「共変微分」と言う。

## 再び, 単位球での例



緯線, 子午線移動(map).ggb

単位球では,  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^1 = \cos \theta / \sin \theta$ ,  $\Gamma_{22}^1 = -\sin \theta \cos \theta$  だから,

A.  $x^1(\theta)$  正方向に平行移動 のとき,

$$\frac{dX^1}{dx^1} + X^1 \Gamma_{11}^1 + X^2 \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \frac{dX^2}{dx^1} + X^1 \Gamma_{11}^2 + X^2 \Gamma_{21}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{dX^1}{dx^1} = \right) \frac{dX^1}{d\theta} = 0, \quad \left( \frac{dX^2}{dx^1} = \right) \frac{dX^2}{d\theta} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} X^2$$

$$\Leftrightarrow X^1 = A^1 (\text{一定}), \quad X^2 = A^2 / \sin \theta$$

(ただし,  $A^1, A^2$  は  $\theta = \pi/2$  のときの  $X^1, X^2$  の値)

B.  $x^2(\phi)$  正方向に平行移動のとき,

$$\frac{dX^1}{dx^2} + X^1 \Gamma_{12}^1 + X^2 \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \frac{dX^2}{dx^2} + X^1 \Gamma_{12}^2 + X^2 \Gamma_{22}^2 = 0$$

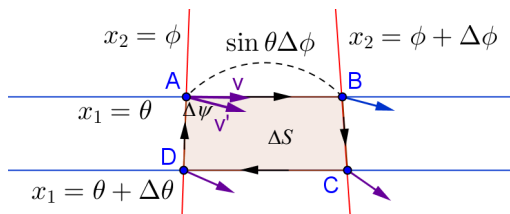
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left( \frac{dX^1}{dx^2} = \right) \frac{dX^1}{d\phi} = (\sin \theta \cos \theta) X^2 \\ \left( \frac{dX^2}{dx^2} = \right) \frac{dX^2}{d\phi} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} X^1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X^1 = A^1 \cos(\cos \theta \cdot \phi) + A^2 \sin \theta \cdot \sin(\cos \theta \cdot \phi) \\ X^2 = A^2 \cos(\cos \theta \cdot \phi) - A^1 / \sin \theta \cdot \sin(\cos \theta \cdot \phi) \end{cases}$$

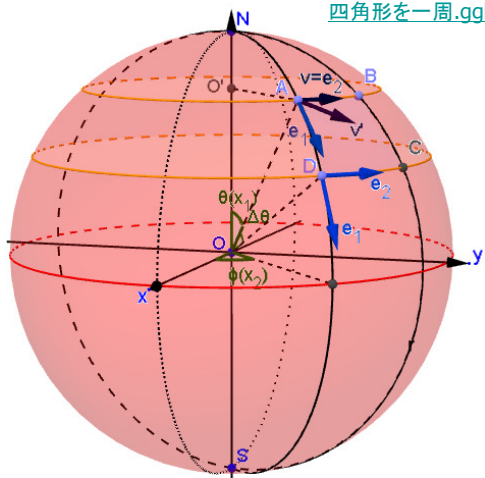
(ただし,  $A^1, A^2$  は  $\phi = 0$  のときの  $X^1, X^2$  の値)

# § 3. 四角形の周りを1周する時

## 単位球での例



四角形を一周.ggb



単位球上に図のような四角形 ABCD がある.

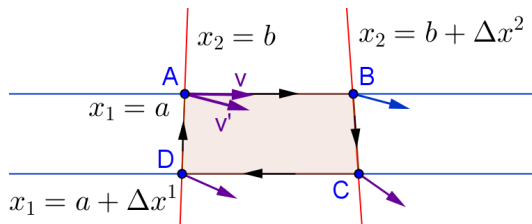
Aに於ける接ベクトル  $\bar{v} = X^1 \bar{e}_1 + X^2 \bar{e}_2$  を  
 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$  と平行移動したベクトルを  $\bar{v}$ ,  
 $\Delta \bar{v} \equiv \bar{v} - \bar{v} = \Delta X^1 \bar{e}_1 + \Delta X^2 \bar{e}_2$  とすると,  $\Delta \theta \approx 0, \Delta \phi \approx 0$  の時

$$\begin{cases} \Delta X^1 \approx X^2 \sin^2 \theta \Delta \theta \Delta \phi \\ \Delta X^2 \approx -X^1 \Delta \theta \Delta \phi \end{cases} \dots (*)$$

四角形ABCDの面積を  $\Delta S$  とすると,  $\Delta S \approx \sin \theta \Delta \theta \Delta \phi$ .  
 $\bar{v} = \bar{e}_2 (A^1 = 0, A^2 = 1)$  のとき,  $\Delta \bar{v} \approx |\bar{e}_1| \sin^2 \theta \Delta \theta \Delta \phi \approx \sin \theta \Delta S$   
 $\bar{v}$  と  $\bar{v}$  のなす角を  $\Delta \psi$  とすると,  $|\bar{v}| = |\bar{e}_2| \approx \sin \theta, \Delta \bar{v} \perp \bar{v}$  だから,  

$$\Delta \psi \approx \tan(\Delta \psi) \approx \frac{|\Delta \bar{v}|}{|\bar{v}|} \approx \frac{\sin \theta \Delta S}{\sin \theta} = \Delta S$$
 同様に,  $\bar{v} = \bar{e}_1$  のとき,  $\Delta \bar{v} \approx |\bar{e}_1| \cdot 1 \cdot \Delta \theta \Delta \phi \approx \sin \theta \Delta \theta \Delta \phi \approx \Delta S$   
 $\bar{v}$  と  $\bar{v}$  のなす角を  $\Delta \psi$  とすると,  $|\bar{v}| = |\bar{e}_1| = 1, \Delta \bar{v} \perp \bar{v}$  だから,  

$$\Delta \psi \approx \tan(\Delta \psi) \approx \frac{|\Delta \bar{v}|}{|\bar{v}|} \approx \frac{\Delta S}{1} = \Delta S$$
 即ち, (\*) の図形的意味は,  $\Delta \psi \approx \Delta S$



曲面上の4点  $A(a, b)$ ,  $B(a, b + \Delta x^2)$ ,  $C(a + \Delta x^1, b + \Delta x^2)$ ,  $D(a + \Delta x^1, b)$  を頂点とする四角形がある。  
 $A$  に於ける接ベクトル  $\vec{v} = X^1 \vec{e}_1 + X^2 \vec{e}_2$  を,  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$  の順に, 平行移動したベクトルを  $\vec{v}'$ ,  $\Delta \vec{v} = \vec{v}' - \vec{v} = \Delta X^1 \vec{e}_1 + \Delta X^2 \vec{e}_2$  とすると,  $\Delta X^1, \Delta X^2$  は  $\Delta x^1, \Delta x^2, X^1, X^2$  に関して線型で, 次の様に書ける.

$$\begin{cases} \Delta X^1 = R^1_{\alpha 12} X^\alpha \Delta x^1 \Delta x^2 = R^1_{112} X^1 \Delta x^1 \Delta x^2 + R^1_{212} X^2 \Delta x^1 \Delta x^2 = R^1_{212} X^2 \Delta x^1 \Delta x^2 \\ \Delta X^2 = R^2_{\alpha 12} X^\alpha \Delta x^1 \Delta x^2 = R^2_{112} X^1 \Delta x^1 \Delta x^2 + R^2_{212} X^2 \Delta x^1 \Delta x^2 = R^2_{112} X^1 \Delta x^1 \Delta x^2 \end{cases} \left( \begin{array}{l} \text{単位球では,} \\ R^1_{212} = \sin^2 \theta, \quad R^2_{112} = -1 \end{array} \right)$$

(  $|\vec{v}| \approx |\vec{v}'|$  だから,  $\Delta \vec{v} \perp \vec{v}$ . よって  $R^1_{112} = R^2_{212} = 0$  となる.)

また  $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$  の順に 逆周りしたときの, 成分の変化を  $\Delta Y^1, \Delta Y^2$  とすると,

$$\begin{cases} \Delta Y^1 = R^1_{\alpha 21} X^\alpha \Delta x^2 \Delta x^1 = R^1_{221} X^2 \Delta x^2 \Delta x^1 \\ \Delta Y^2 = R^2_{\alpha 21} X^\alpha \Delta x^1 \Delta x^2 = R^2_{221} X^2 \Delta x^1 \Delta x^2 \end{cases} \left( \begin{array}{l} \text{単位球では,} \\ R^1_{221} = -\sin^2 \theta, \quad R^2_{121} = 1 \end{array} \right)$$

明らかに  $\Delta Y^1 = -\Delta X^1$ ,  $\Delta Y^2 = -\Delta X^2$  だから,  $R^1_{221} = -R^1_{212}$ ,  $R^2_{221} = -R^2_{212}$  が成り立つ.

この  $R^i_{jkl}$  (2次元面では  $i, j, k, l$  は 1, 2) は 「Riemanの曲率テンソル」と呼ばれる.

## § 4. 様々なテンソル

1. 計量テンソル  $\boxed{g_{ij} \equiv \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j}$

単位球では,  $\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$ ,  $|\bar{e}_1|=1$ ,  $|\bar{e}_2|=\sin\theta$  だから,

$$g_{11} = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = 1, \quad g_{12} = g_{21} = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = 0, \quad g_{22} = \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 = \sin^2\theta$$

即ち 
$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

2. Ricci テンソル  $\boxed{R_{ij} \equiv R^k{}_{ikj} = R^1{}_{i1j} + R^2{}_{i2j}}$

単位球では,

$$R_{11} = R^1{}_{111} + R^2{}_{121} = 0 + 1 = 1$$

$$R_{22} = R^1{}_{212} + R^2{}_{222} = \sin^2\theta + 0 = \sin^2\theta$$

$$R_{12} = R^1{}_{112} + R^2{}_{122} = 0 + 0 = 0$$

$$R_{21} = R^1{}_{211} + R^2{}_{221} = 0 + 0 = 0$$

即ち 
$$R_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

3. スカラー曲率  $\boxed{R \equiv g^{ij}R_{ij} = g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{21}R_{21} + g^{12}R_{12}}$

単位球では,  $R = g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} = 1 + \sin^2\theta \cdot \frac{1}{\sin^2\theta} = 2$

4. Einstein テンソル  $\boxed{G_{ij} \equiv R_{ij} - \frac{1}{2}R g_{ij}}$

単位球では,

$$G_{11} \equiv R_{11} - \frac{1}{2}R g_{11} = 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 0$$

$$G_{12} \equiv R_{12} - \frac{1}{2}R g_{12} = 0,$$

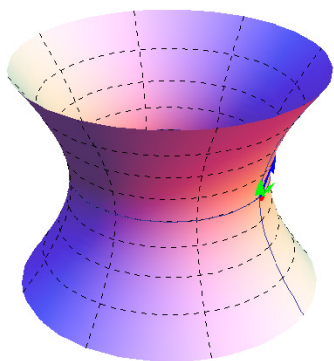
$$G_{21} \equiv R_{21} - \frac{1}{2}R g_{21} = 0,$$

$$G_{22} \equiv R_{22} - \frac{1}{2}R g_{22} = \sin^2\theta - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin^2\theta = 0$$

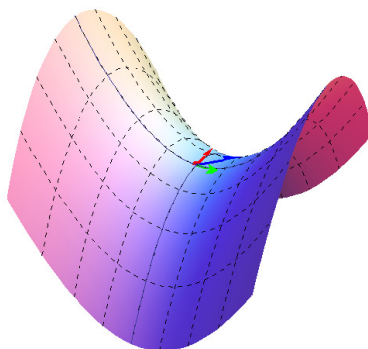
即ち, 
$$G_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



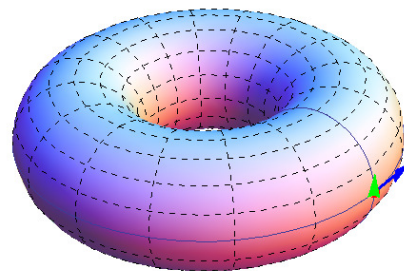
## § 5.様々な曲面 (by Mathematica9)



一葉双曲面



双曲放物面



トーラス

$x^1, x^2$  方向への平行移動と, 様々なテンソルの値が見れます.  
(特に Einstein テンソルは, 興味深い.)