Monty-Hall problem
&
Mathematica による統計力学 #1

2015年11月
Cabri研究会
生越　茂樹

§ 1.Monty-Hall problem

モンティ・ホールが司会を務めるアメリカのゲームショー番組「Let's make a deal」の中で、こんなゲームが行われました。

あなたの前に３つのドアがあります。１つのドアの後ろには新車があり、残り２つのドアの後ろにはヤギがいます。新車のドアを当てることができれば景品の新車がもらえますが、ヤギのときは何ももらえません。そういうゲームです。

あなたが１つのドアを選択すると、そのあと、モンティが残りのドアのうち１つを開けてヤギを見せてくれます。ヤギは２匹いるので、あなたが最初に選んだドアが当たりでもハズレでも、残り２つのドアのうち、少なくとも１つの後ろにはヤギがいる、というわけです。

たとえば、あなたが最初にＣのドアを選んだとしましょう（図 143）。モンティがヤギのいるドア（ここではＢとしましょう）を開けて見せてくれます。すると、新車はＡかＣのどちらかにあることになります。

このとき、あなたならどうしますか？　ＡとＣのどちらに新車があるかは五分五分なので、どちらを選んでも結果に違いはないと思いますか？　それとも、ドアを変更するほうが当たる確率が高まるでしょうか？

「直感を裏切る数学」神永正博著

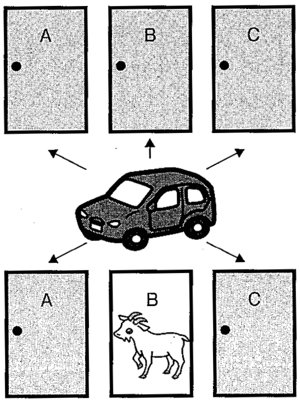


図143　モンティ・ホール問題

monty_hall.ggb

monty_hall.nb

§2.*Mathematica* による統計力学 #1

ー小正準集合の要素の数え上げー

統計力学における集合

- **小正準集合 (micro canonical ensemble)**
  -孤立系. エネルギーが一定な微視状態の集合.
- **正準集合 (canonical ensemble)**
  -熱浴に接していて, 温度が一定な系の集合.
- **大正準集合 (grand canonical ensemble)**
  -熱浴, 粒子源と接し, 温度, μ が一定な系の集合.

先験的等確率の原理 (principle of equal a priori probabilities)
-同じエネルギーを持つ微視状態は 全て同じ確率で起こる-
(小正準集合の要素は 全て同じ確率で現れる)

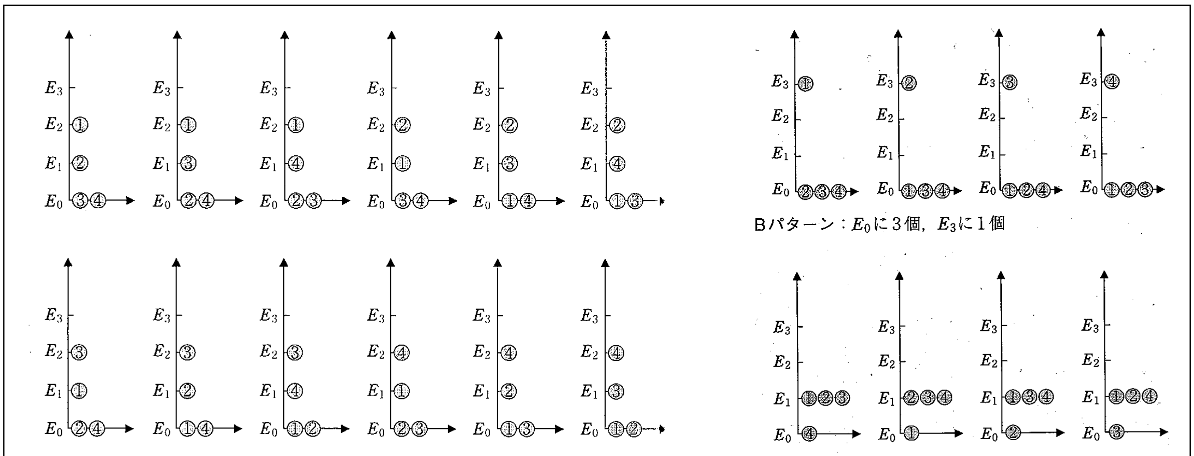
§ 2-1.「Maxwell-Boltzman 統計」の微視状態

$$\boxed{\begin{cases}\text{違うエネルギー状態にある分子を入れ替え} \rightarrow \text{異なる微視状態} \\ \text{同じエネルギー状態にある分子の入れ替え} \rightarrow \text{同じ微視状態}\end{cases}}$$

というルールで微視状態の数を数える.

例えば, 全エネルギー $E=3$, 全粒子数 $N=4$ のとき，微視状態の数は

$$\underbrace{\frac{4!}{2!1!1!}}_{\text{Aパターン}} + \underbrace{\frac{4!}{3!1!}}_{\text{Bパターン}} + \underbrace{\frac{4!}{3!1!}}_{\text{Cパターン}} = 12+4+4=20 \ \left(={}_4H_3\right)$$



Aパターン：E_0に2個，E_1に1個，E_2に1個

Bパターン：E_0に3個，E_3に1個

Cパターン：E_0に1個，E_1に3個

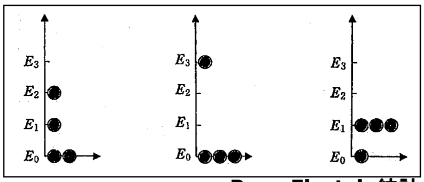
§ 2-2.「Bose-Einstein 統計」の微視状態

$$\begin{cases} \text{粒子は区別できない.} \\ \text{同一の量子状態に無数の粒子が入れる.} \end{cases}$$

というルールで微視状態の数を数える.

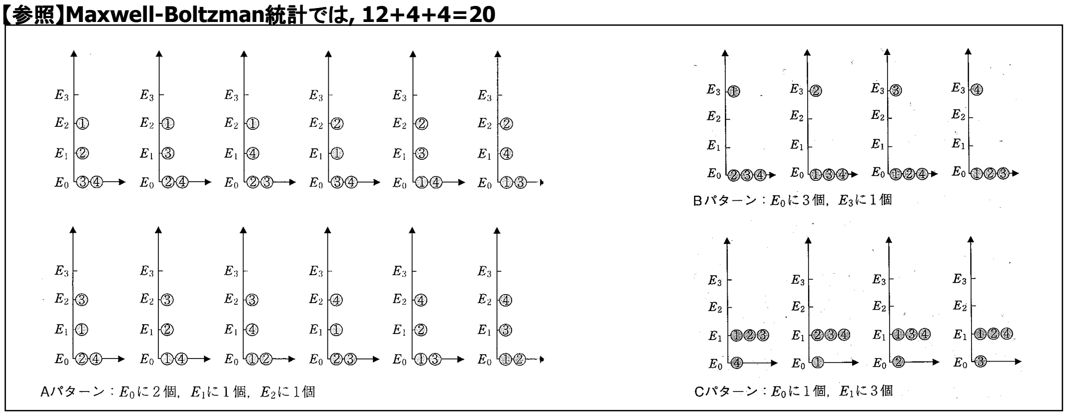
例えば, 全エネルギー $E = 3$, 全粒子数 $N = 4$ のとき，微視状態の数は

$$1 + 1 + 1 = 3$$



Bose-Einstein統計

【参照】Maxwell-Boltzman統計では, 12+4+4=20

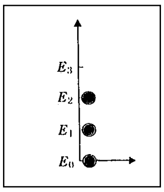


§ 2-3.「Fermi-Dirac 統計」の微視状態

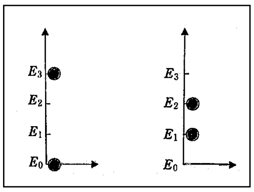
$\begin{cases} \text{粒子は区別できない.} \\ \text{同一の量子状態には 1 個の粒子しか入れない.} \end{cases}$

というルールで微視状態の数を数える.

(例1) 全エネルギー $E=3$, 全粒子数 $N=3$
のとき，微視状態の数は　1

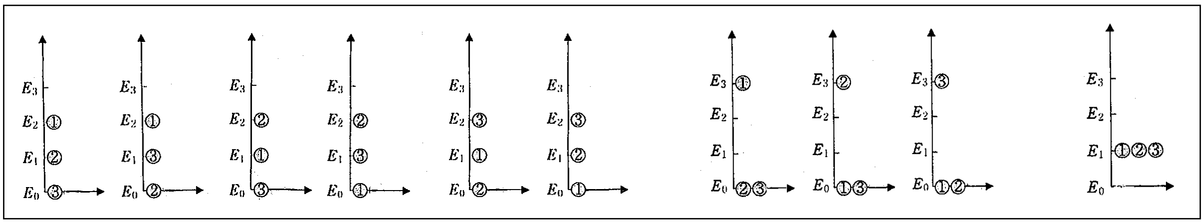


(例2) 全エネルギー $E=3$, 全粒子数 $N=2$
のとき，微視状態の数は　2



$\begin{pmatrix} \text{MB統計では, 微視状態の数は } 6+3+1=10 \text{ 個} \\ \text{BE統計では, 微視状態の数は } 1+1+1=3 \text{ 個} \end{pmatrix}$

【参照】(例1)のMaxwell-Boltzman統計



§ 2-4. 分布関数 (distribution function)

「**大正準集合**」を利用すると，Maxwell-Boltzman(MB), Bose-Einstein(BE), Fermi-Dirac(FD) 統計における粒子数の分布は, 次の様になる.(注) 即ち,

$T=$ 一定の時，エネルギー準位が e の 1 つの状態にある粒子の数 $f(e)$ は

$$f(e)=\begin{cases} \dfrac{N}{\Xi}e^{-\beta(e-\mu)} \propto e^{-\beta e} & \text{(MB統計)} \\ \dfrac{1}{e^{\beta(e-\mu)}-1}=\dfrac{1}{Ce^{\beta e}-1} & \text{(BE統計)} \\ \dfrac{1}{e^{\beta(e-\mu)}+1}=\dfrac{1}{Ce^{\beta e}+1} & \text{(FD統計)} \end{cases}$$

(T は温度, N は総粒子数, Ξ は 大分配関数, $\beta=\dfrac{1}{k_{\mathrm{B}}T}$ (k_{B}はボルツマン定数)

$C=e^{-\beta\mu}$, $\mu=$ (化学ポテンシャル) $\equiv\left(\dfrac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V\ \text{一定}}=\left(\dfrac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V\ \text{一定}}=\dfrac{G}{N}$)

【注】通常は大正準集合を使って証明されるが，縮重度 >>1 の場合は 小正準集合を利用しても証明できる. (広島大の先生による証明.pdf) しかし，縮重度 =1 の場合は難しそう.

プログラムのポイント.nb

統計力学.nb