「幾何再入門」と「シンデレラ」

～Long time no see you～

2016年4月10日

Cabri研究会

生越　茂樹

§1.「幾何再入門」 再訪

ーJennings「幾何再入門」第4章「射影幾何」より 抜粋＆私見ー

定義 4.4 Euclid 直線上の 4 点の複比. Euclid 直線上の 4 個の異なる点 A,B,C,D の複比 $[A,B,C,D]$ とは

$$[A,B,C,D]=\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AD}}\cdot\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC}}=\frac{\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}}{\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}}$$

のことである. □

($\overrightarrow{AC}$ などは「方向付き長さ」)

命題 4.4.1 A,B,C,D を Euclid 直線上の 4 点とし, P はその直線上にない点とする. すると

1.

$$[A,B,C,D]=\frac{\sin\angle APC}{\sin\angle APD}\cdot\frac{\sin\angle BPD}{\sin\angle BPC}. \qquad (4.1)$$

2. P からもう一つの直線の上への A,B,C,D の射影を A',B',C',D' とする. すると

$$[A,B,C,D]=[A',B',C',D']$$

である(図 4.12 を見よ).

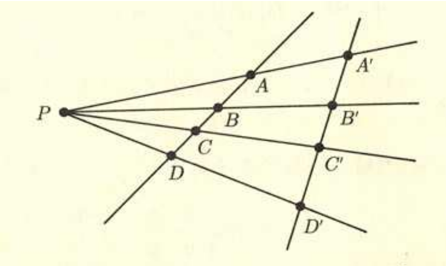


図 4.12 $[A,B,C,D]=[A',B',C',D']$

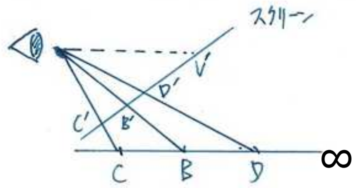
系 4.1 B,C,D を Euclid 直線上の 3 点とし, B',C',D' を透視図におけるそれらの像とし, V' を直線の消点とする. すると

$$\frac{BD}{BC}=[V',B',C',D'].$$

[証明] 命題 4.4.1 により

$$[V',B',C',D']=[\infty,B,C,D]=\frac{BD}{BC}.$$ ▮

$$\left(\because[\infty,B,C,D]=\frac{\dfrac{\overrightarrow{\infty C}}{\overrightarrow{BC}}}{\dfrac{\overrightarrow{\infty D}}{\overline{BD}}}=\frac{\overrightarrow{BD}}{\overline{BC}}\right)$$



「幾何再入門」岩波書店
G.Jennings 著
伊理正夫・伊理由美訳

練習問題 4.4.2　完全四辺形．

A, B, C, D は平面上の 4 点で，どの 3 点も一直線上にないとする．四辺形 $\overleftrightarrow{AB} \cup \overleftrightarrow{BC} \cup \overleftrightarrow{CD} \cup \overleftrightarrow{DA}$ に対角線 $\overleftrightarrow{AC}$ と $\overleftrightarrow{BD}$ を加えたものを**完全四辺形** $ABCD$ という（図 4.16）．

$$V_1 = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}, \quad V_2 = \overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{BC},$$
$$V_3 = \overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{V_1V_2}, \quad V_4 = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{V_1V_2}.$$

とする．

$\overleftrightarrow{V_1V_4}$ を無限遠直線と見なすと，A, B, C, D は Euclid 平面 $\mathbf{P}^2 - \overleftrightarrow{V_1V_4}$ における平行四辺形の頂点になることを示せ．このことを使って $[V_1, V_2, V_3, V_4] = -1$ を示せ．

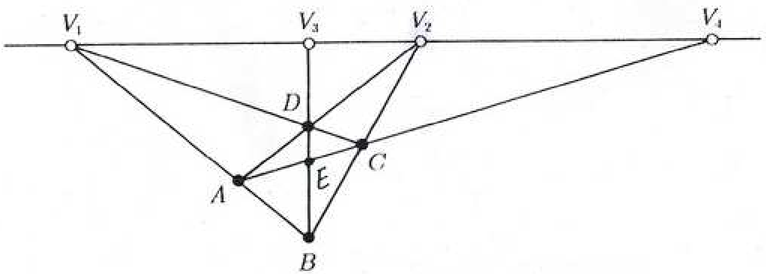


図 4.16　完全四辺形

［証］$ABCD$ が平行四辺形であることを考慮し，複比の符号をぬきにして大きさだけを考えると，

$$
\begin{aligned}
&|[V_1, V_2, V_3, V_4]| \\
&= |(\sin\angle V_1BV_3/\sin\angle V_1BV_4)(\sin\angle V_2BV_4/\sin\angle V_2BV_3)| \\
&= |(\sin\angle ABD/\sin\angle CAB)(\sin\angle DAC/\sin\angle CBD)| \\
&= |((AB)(BD)\sin\angle ABD)/((CA)(AB)\sin\angle CAB) \\
&\quad \times((DA)(AC)\sin\angle DAC)/((CB)(BD)\sin\angle CBD)| \\
&= (\text{面積}\,\triangle ABD/\text{面積}\,\triangle CAB)(\text{面積}\,\triangle DAC/\text{面積}\,\triangle CBD)| = 1.
\end{aligned}
$$

したがって $[V_1, V_2, V_3, V_4] = -1$ である．

【私的解答】

AC と BD の交点を E とすると，B からの射影によって 複比は変わらないから

$$[V_1, V_2, V_3, V_4] = [A, C, E, V_4]$$

$\overleftrightarrow{V_1V_4}$ を無限円直線とみなすと, V_4 は無限遠点であり，四角形 $ABCD$ は平行四辺形だから

$$[A, C, E, V_4] = \frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{CE}} = -1$$

ゆえに,

$$[V_1, V_2, V_3, V_4] = -1$$

主張 4.10.1 K を滑らかな円錐曲線とし，O は K 以外の点とする．O を通りそれぞれ K と 2 点で交わる直線 L_1, L_2, L_3 を描く．

$$L_1 \cap K = \{A, A'\},$$
$$L_2 \cap K = \{B, B'\},$$
$$L_3 \cap K = \{C, C'\}$$

とおく．

$$P = \overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'B},$$
$$R = \overleftrightarrow{BC'} \cap \overleftrightarrow{B'C},$$
$$S \in K \cap \overleftrightarrow{PR}$$

とする．すると $\overleftrightarrow{OS}$ は S において K に接する(図 4.29)．

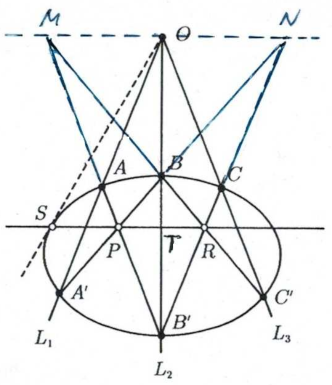


図 4.29 円錐曲線の接線

［証明］練習**4·10·1** としてヒントつきで出題＆解答されているが，省略．

さて [O,T,B,B′]の値は？

【私的主張】

$\overleftrightarrow{AB'}$ と $\overleftrightarrow{C'B}$ の交点をM, $\overleftrightarrow{BA'}$ と $\overleftrightarrow{B'C}$ の交点をN,

$\overleftrightarrow{BB'}$ と $\overleftrightarrow{PR}$ の交点をT とする.

6角形$AB'CC'BA'$ に対し パスカルの定理を使うと,

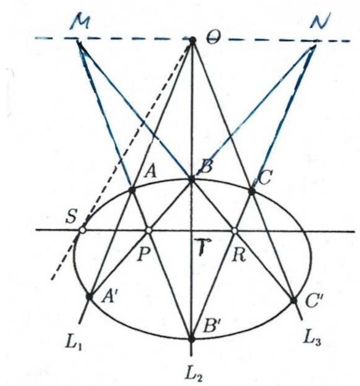
M,O,N は共線．そこで $\overleftrightarrow{MN}$ を無限遠直線と考えると,

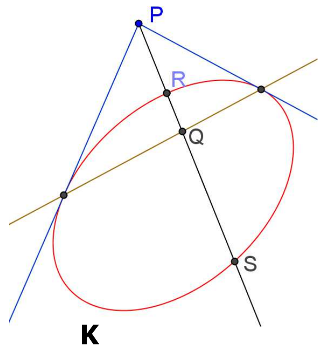
O は無限遠点で四角形 $BPB'R$ は平行四辺形だから,

$$[O,T,B,B'] = \frac{\overline{TB'}}{\overline{TB}} = -\frac{B'T}{BT} = -1$$

即ち，2次曲線 K に関し P と Q が共役で, R と S を $\overleftrightarrow{PQ}$ と K の交点とすると,

$$[P,Q,R,S] = -1$$





§2. 射影変換と「シンデレラ」

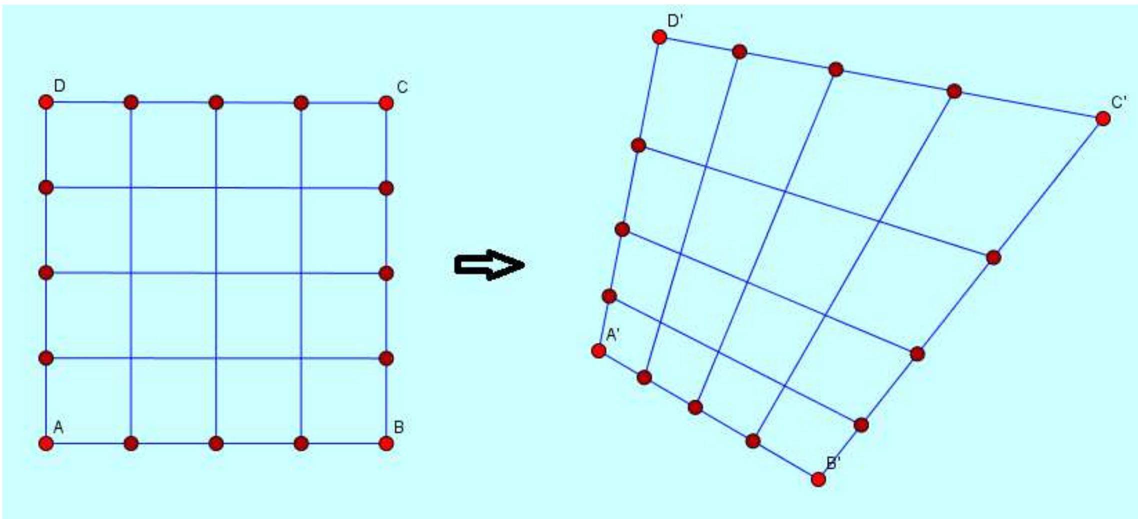
§2-1. 「シンデレラ」における射影変換の2つの方法

(a) [図形objectとして変換]

「Modes」→「Transformation」→「Projective　Transformation」と進み，
4点の像を指定し変換を定義．図形を選択し右上に出来るボタンをクリック．

(b)[図形objectを作成しないで変換]

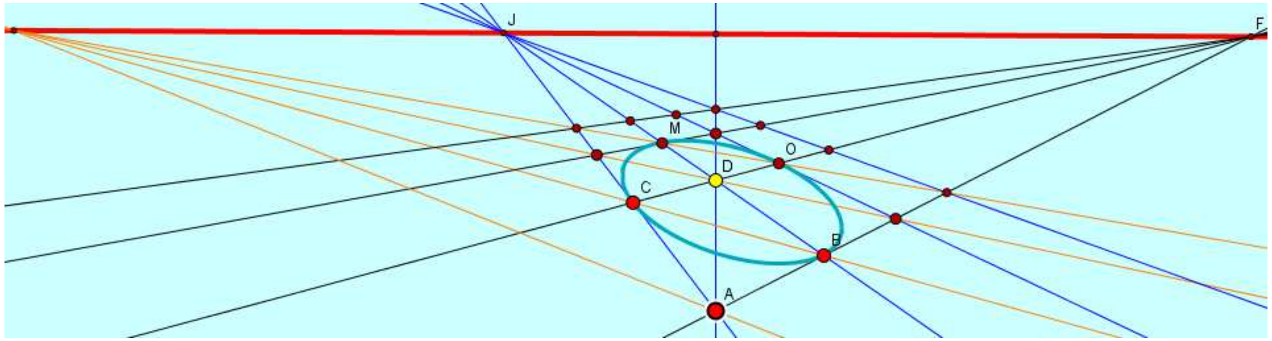
CindyScriptEditor を立ち上げ 「setbasis(A′,B′,C′,D′)」で座標系を移す．
その後 「draw(obj)」や「plot(func)」で　点や線分やグラフを描く.



射影変換.cdy

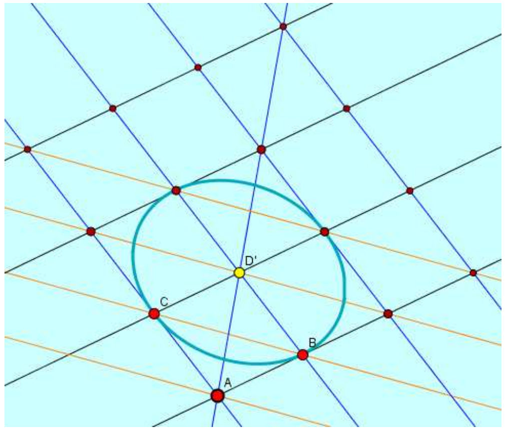
§ 2-2. 完全四辺形（の集合）の射影変換

赤い太線(直線FJ)が無限遠直線になるように射影変換すると？　完全四辺形の変換.cdy



［幾何再入門 練習4·6·1］

→



→ 1.対角線の交点が一致するように完全四辺形を積み重ねた図形は，その3交点が共線になっていれば，斜交座標系の射影である.
2. [J,D,M,B]=[F,D,O,C]=-1 (共役点と交点間の複比)も分かる.

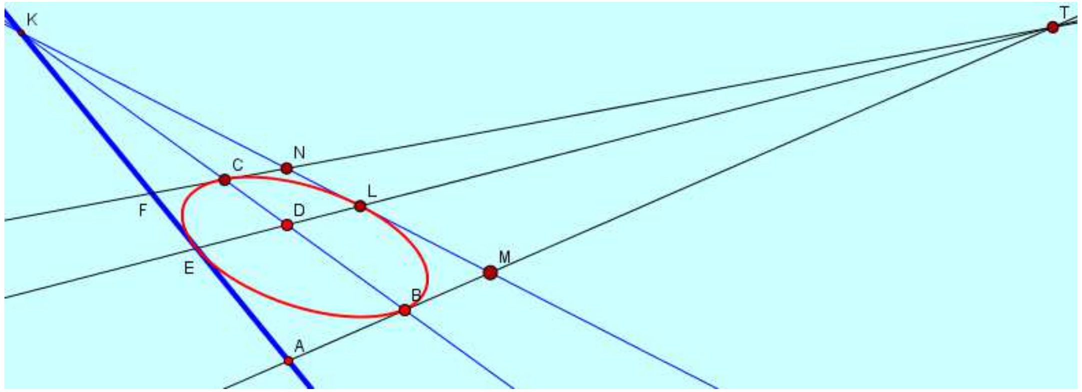
［作図方法］

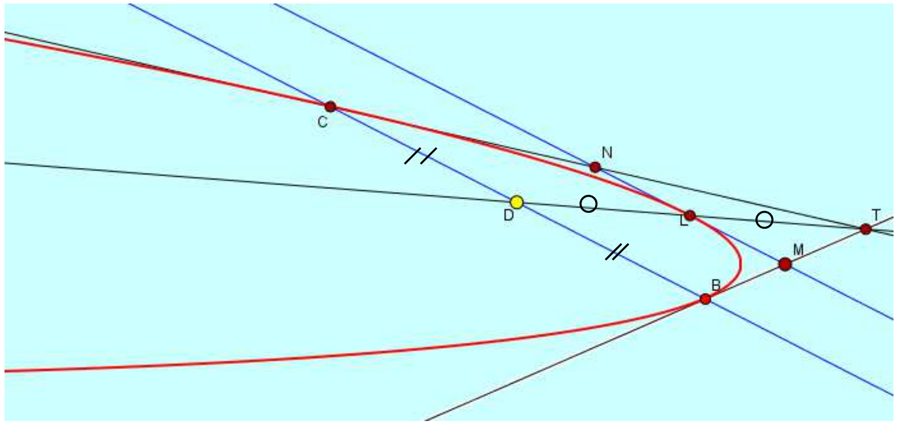
(a) 四辺形ABECが平行四辺形となるような点Eをとる
(b) スライダーを作成し，スライダー上の点Pにパラメーター t を対応させる．点D′を，
t が 0→1と変化すると D から E へ動くように定義する．（CindyScript利用).
(c)四辺形ABDC を 四辺形ABD′C へ写す射影変換を定義し，全ての図形を選択.
次にスライダーと変換ボタン(通常はラベルはTr0)のみ選択を解除し，Inspector で「invisible」 に設定.　最後に変換ボタンをクリックして，図形を変換し スライダーを動かす.

§ 2-3. 楕円の射影変換

青い太線(直線AK)が無限遠直線になる様に射影すると,楕円はどのような図形に移るか？

楕円の変換.cdy





$$\left(\because [\mathrm{E,L,D,T}] = \frac{\dfrac{\overline{ED}}{\overline{LD}}}{\dfrac{\overline{ET}}{\overline{LT}}} = \frac{\dfrac{\overline{TL}}{\overline{DL}}}{\dfrac{\overline{TE}}{\overline{DE}}} = [\mathrm{T,D,L,E}] = -1 \right)$$

楕円は放物線に移る. かつ, [K,D,C,B]=[E,L,D,T]=-1 で, K と E が無限遠点になるので BD=CD, DL=LT となる

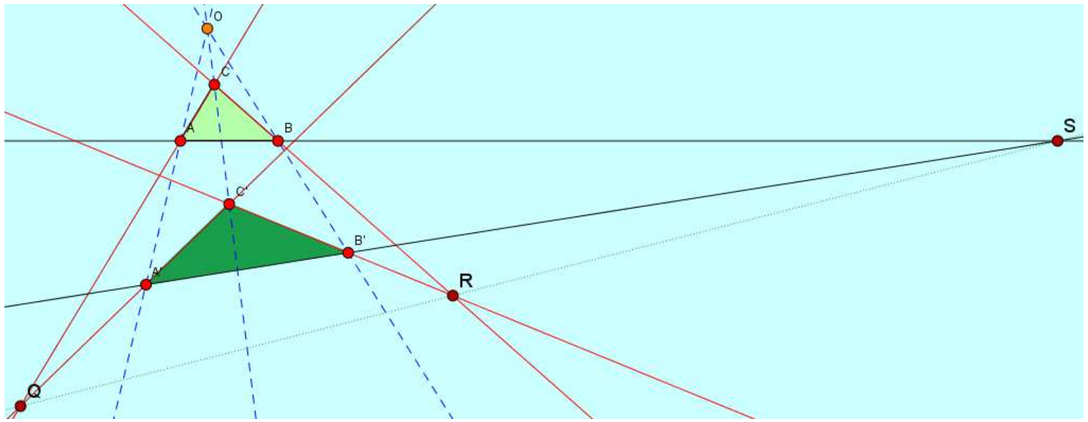
§ 2-4. デザルグの定理

2つの三角形がある点に関し配景的ならば, 対応する辺の3つの交点は共線となる

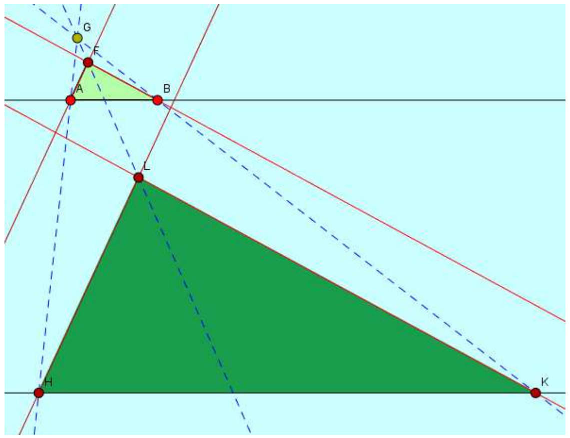
△ABCと△A′B′C′が配景的なとき, AC∩A′C′＝Q と BC∩B′C′=R の2点を無限遠点に射影すると, AB∩A′B′＝S はどうなるか？

Desargues.cdy

→ AC//A′C′かつBC//B′C′であるから, AB//A′B′ となり, S も無限遠直線QR上に移る



→



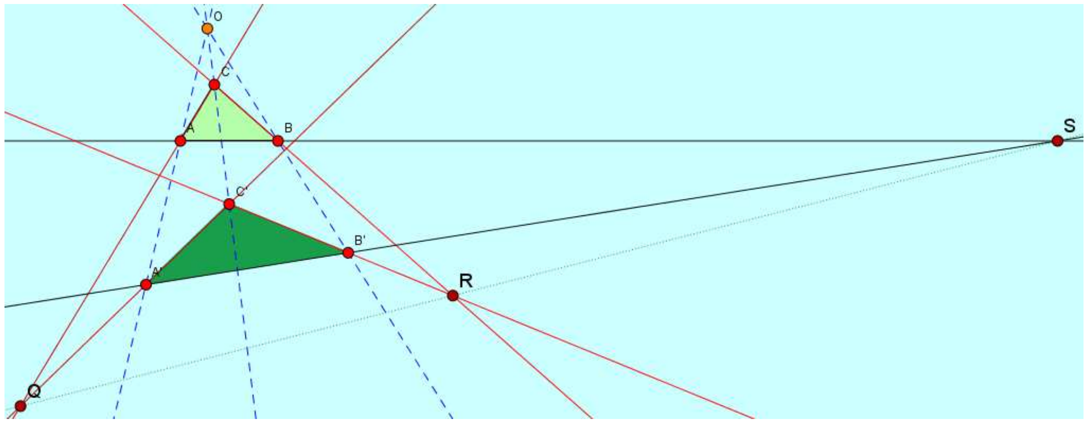
［作図方法］

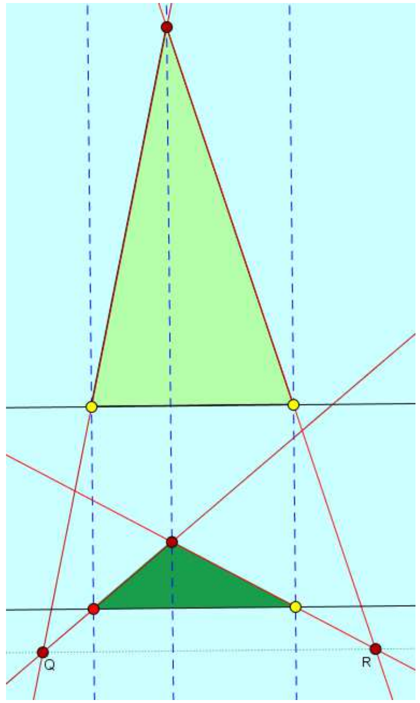
(a) スライダーを作成し, スライダー上の点Pにパラメーター t を対応させる. 点Q′を, tが0→1と変化するとき, Q [Q.x, Q.y, 1]から[Q.x, Q.y, 0]へ動くように定義する. 点R′に関しても同様.（CindyScript利用).

(b)四辺形ABQRを四辺形ABQ′R′ へ写す射影変換を定義し, 全ての図形を選択.
次にスライダーと変換ボタン(通常はラベルはTr0)のみ選択を解除し, Inspector で「invisible」 に設定. 最後に変換ボタンをクリックして, 図形を変換し スライダーを動かす.

［補充1］デザルグの定理の別証明

□ABB′A′を正方形になるように射影する. このとき直線QR//ABとなる事を示す.　Desargues2.cdy



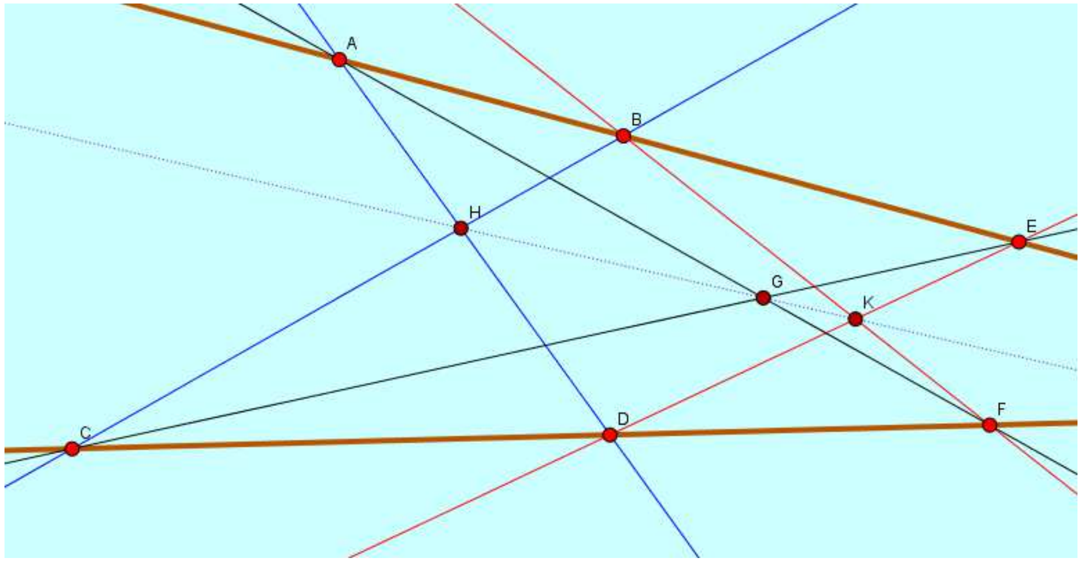


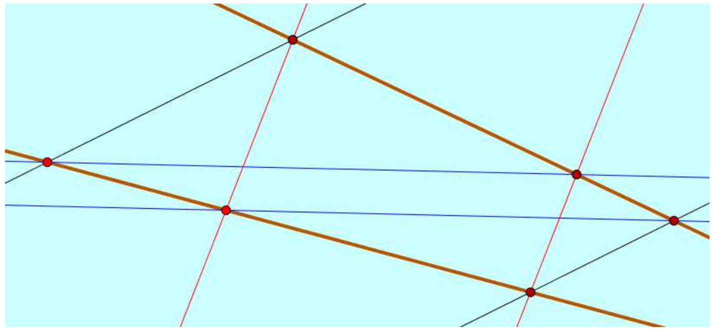
［補充2］パッポスの定理

A,B,Eが直線l上に，C,D,Fが直線 m 上にあるとし, AD∩BG=H, AF∩CE=K, CE∩AF=Gとすると H,K,Gは共線となる.

交点AD∩BG=H, AF∩CE=K, CE∩AF=Gとする. GとKを無限遠点に射影すると？ Pappus.cdy

→ AD//BCとなり，G,H,Kが共線となる.



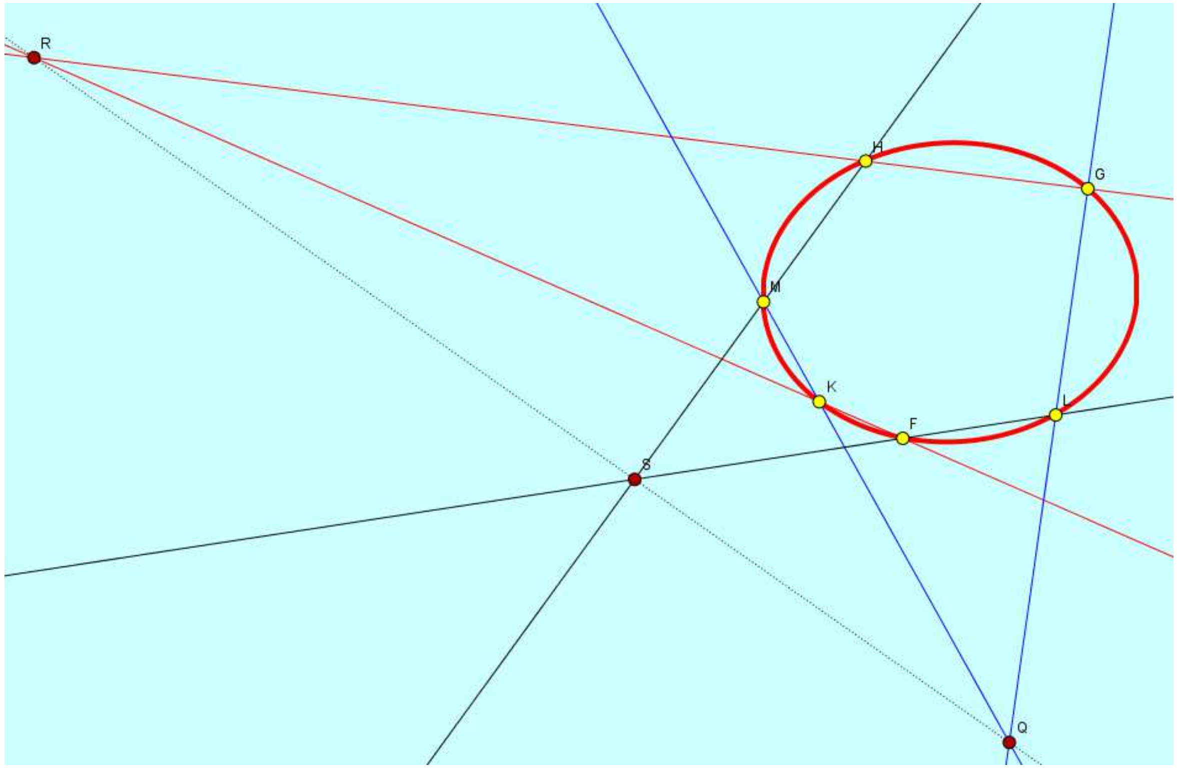


[補充3] パスカルの定理

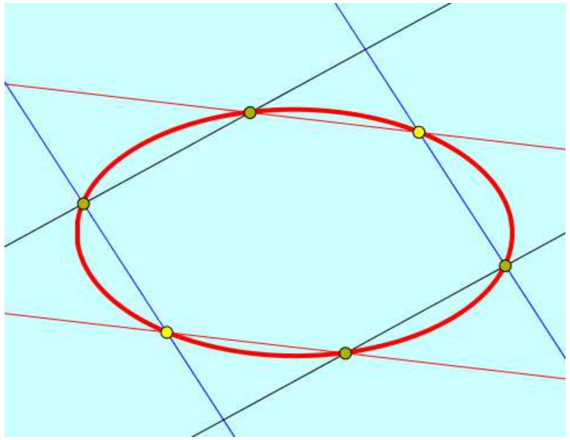
定理 $\boxed{\text{2次曲線上の6点G,H,M,K,F,Lに対し，対辺の交点GH∩KF, HM∩FL, MK∩LG は共線}}$

図で MK∩LG＝Q, GH∩KF=R, HM∩FL=Sとする. Q, R の2点を無限遠点に射影すると？ Pascal.cdy

→「HM//FL」となり，Sも直線QR上にある



→



[証明]「Q,Rを無限遠点に射影した時，Sが直線QR上」⇔「GH//KFかつMK//LG なら HM//FL」を示す.

(i)直線QRが2次曲線と共有点を持たないとき，2次曲線は楕円となる. これをアフィン変換によって円に移すと，HM//FL が成り立つことが分かる.

(ii)共有点を持つとき，2次曲線が楕円に移らない. この時は 複比を使い HM//FL を示す.

[補充4] ‘幾何再入門’ におけるパスカルの定理の証明

定理 4.2　Pascal の定理 (Blaise Pascal 1623–1662).

六辺形が滑らかな円錐曲線に内接するとき，六辺形の 3 組の対辺の交点は共線である．

（いいかえれば，点 A, B, C, A', B', C' が滑らかな円錐曲線の上にあるとき

$$P = \overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'B},\ Q = \overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{A'C},\ R = \overleftrightarrow{BC'} \cap \overleftrightarrow{B'C}$$

は共線である．図 4.26 を見よ．p.158 の Pappus の定理と比較せよ.）

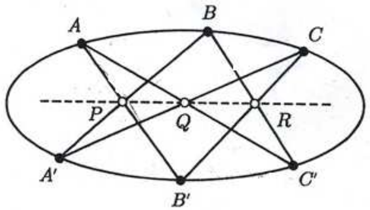


図 4.26　Pascal の定理

［証明］（文献 [4], 第 4 章，8.4 節，pp.209-212 による．図 4.27 を見よ.）
$X = \overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{BC'}$, $Y = \overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{B'C}$ とする．B から射影すれば円錐曲線上の 4 点の複比の定義(定義 4.7)により

$$[C', B', A, A'] = [\overleftrightarrow{BC'}, \overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{BA}, \overleftrightarrow{BA'}].$$

また，直線上の 4 点の複比の定義(定義 4.6)により

$$[X, B', A, P] = [\overleftrightarrow{BC'}, \overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{BA}, \overleftrightarrow{BA'}].$$

したがって

$$[C', B', A, A'] = [X, B', A, P]. \tag{4.10}$$

C から射影すれば，同様にして，

$$[C', B', A, A'] = [\overleftrightarrow{CC'}, \overleftrightarrow{CB'}, \overleftrightarrow{CA}, \overleftrightarrow{CA'}],$$

$$[C', Y, A, Q] = [\overleftrightarrow{CC'}, \overleftrightarrow{CB'}, \overleftrightarrow{CA}, \overleftrightarrow{CA'}].$$

したがって

$$[C', B', A, A'] = [C', Y, A, Q].$$

これと式 (4.10) をいっしょにして

$$[X, B', A, P] = [C', Y, A, Q] \tag{4.11}$$

が得られる．

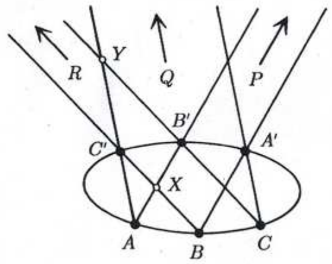


図 4.27

さて，$\overleftrightarrow{PQ}$ を無限遠直線として，それ以外の $\mathbf{P}^2$ を Euclid 平面と見なす．P, Q, R が共線であることを示すためには，R が無限遠点であることを示すか，あるいは別の言い方をすれば，$\overleftrightarrow{BC'}$ が Euclid 平面上で $\overleftrightarrow{B'C}$ に平行であることを示せば十分である．P と Q は無限遠点であるから，Euclid 平面上で $\overleftrightarrow{AB'}$ は $\overleftrightarrow{A'B}$ に平行であり $\overleftrightarrow{AC'}$ は $\overleftrightarrow{A'C}$ に平行である．また，P と Q は無限遠点であるから，式 (4.11) により

$$\frac{\overrightarrow{XA}}{\overrightarrow{B'A}} = \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{YA}}$$

である．したがって，三角形 $\triangle YAB'$ と $\triangle C'AX$ のどちらも，一つの辺が $\overleftrightarrow{AB'}$ 上にもう一つの辺が $\overleftrightarrow{AC'}$ 上にあるから，これら二つの三角形は相似である．したがって

$\overleftrightarrow{BC'}$ は $\overleftrightarrow{B'C}$ に平行である．

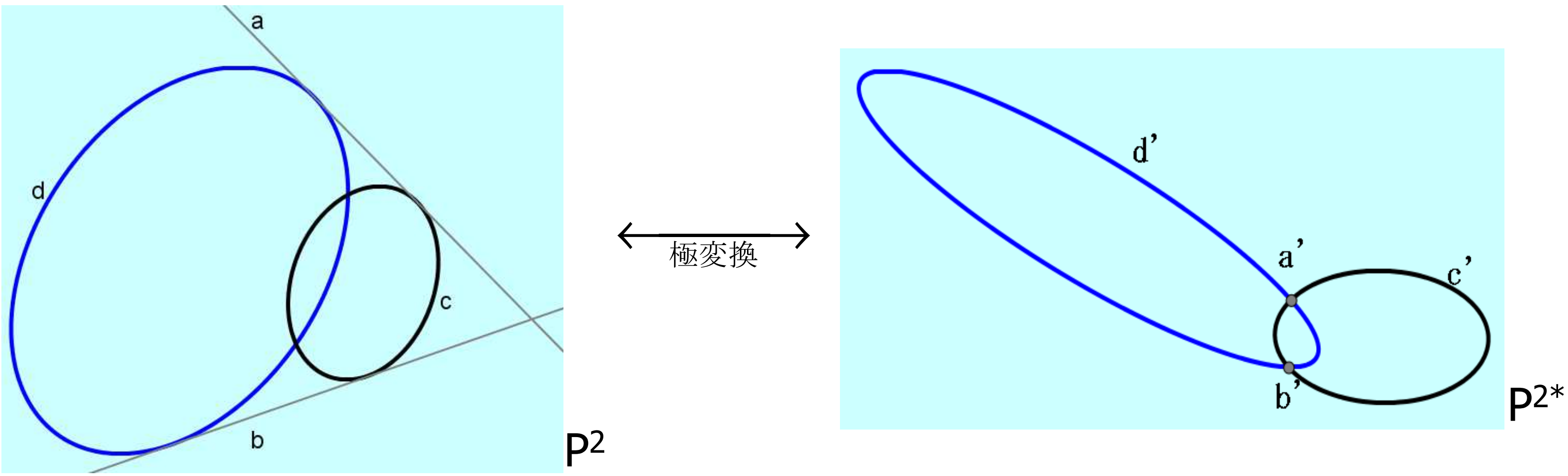
特に，$R = \overleftrightarrow{BC'} \cap \overleftrightarrow{B'C}$ は無限遠点となり，したがって，$\overleftrightarrow{PQ}$ 上にある．∎

§ 3. 極変換

射影平面P^2と, その双対平面P^{2*} の極変換を次の様に定める. (Gennings)

•直線 $ax+by+cz=0$ ・　点$(a:b:c)=(ka:kb:kc)$
•2次曲線 $a\,x^2+b\,y^2+c\,z^2+2f\;xy+2g\;yz+2h\;zx=0$
・　曲線上の点に於ける接線を極変換した点の集合

[例1] 極変換により, 左下の図形はどのような図形に移るか？ 極変換.cdy　極変換1.ggb



極変換 により, P^2上の楕円c とd の共通接線 a は, P^{2*} 上の２次曲線c'とd'の交点 a' に移る. よってa' を 極変換 によって移すと, c とd の共通接線になる.

(シンデレラは, 極変換がdefaultで備わっている. しかし P^{2*} は　　で交点を作れないので GeoGebra で作成した.)

[例 2] 4本の直線 a, b, c, d に接する放物線をEとすると, E は a, b, c, d と無限遠直線 o に接する 2 次曲線と等しい．故に Eの極変換E' は 5点 a',b',c',d',o' を通る 2 次曲線となる. (ただし, a' は 直線 a を極変換した点. b', c',…も同様.) 極変換2.ggb