目で見る行列・1次変換

-計算ちょっとだけ-

おごせ　しげき
生越 茂樹

平成 21 年 8 月 16 日

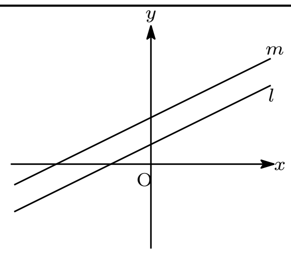
目 次

第一部への基礎力チェック

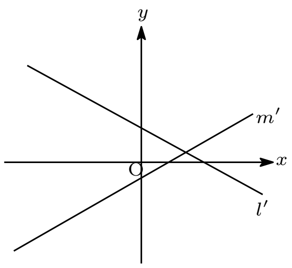
次の問題に答えよ.

問題 0-a

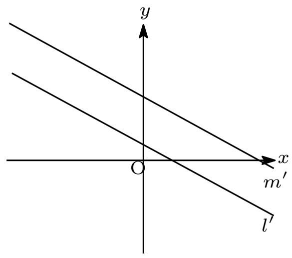
右の直線 l,m をある一次変換で移すと，下のいずれかのようになった.
正しい図を選べ.



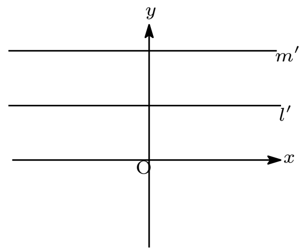
【図 1】



【図 2】



【図 3】



問題 0-b

行列 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ による一次変換 f で，直線 $l : 2x + y = 4$ はどのような図形に移るか.

問題 0-c

直線 l の媒介変数表示を

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とするとき，行列 $F = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ の表す一次変換によって l が移される図形を，媒介変数表示せよ.

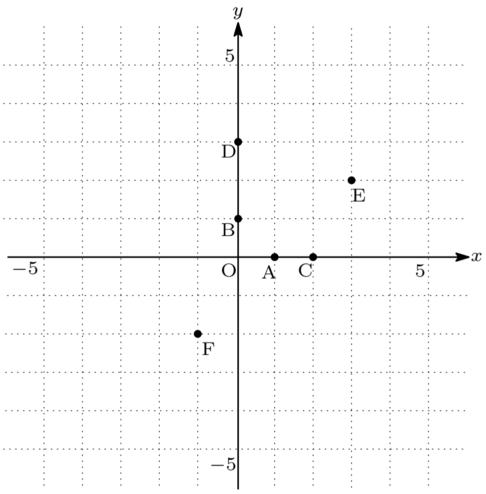
問題 0-d

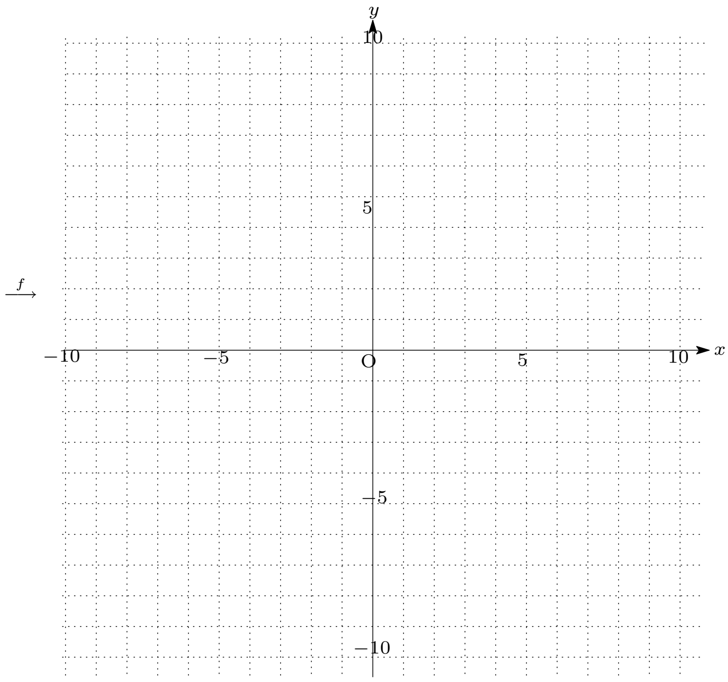
xy 平面上に 4 点 $\mathrm{P}(1,1)$,$\mathrm{Q}(2,1)$,$\mathrm{R}(2,2)$,$\mathrm{S}(1,2)$ を頂点とする正方形 PQRS がある.
行列 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換 f による正方形 PQRS の周および内部の像を図示せよ.

1 Introduction

問題 1-a

行列 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換 f による次の点の像を求め, 右の図に図示せよ.
$A(1,0), B(0,1), C(2,0), D(0,3), E(3,2), F(-1,-2)$





2 線形性とは？

上の問題で, $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから，その像は

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OE}'} &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\left\{3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \\
&= 3\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= 3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

すなわち

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \overrightarrow{\mathrm{OE}'} = 3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となり，結局 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を，それぞれ $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に変えた**だけ**になっている．これを，**線形性**(linearlity) という.

線形性 (特別な場合)

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，

$$\begin{cases} A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \end{cases}$$

であるから，

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\left\{x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}=xA\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+yA\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$$

すなわち，

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{f}x\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$$

すなわち，行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$ **による一次変換は，** $\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$ **を** $\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{c}\end{pmatrix}$ **に，** $\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$ **を** $\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{d}\end{pmatrix}$ **に変えるだけ**といえる．これは，次のように一般化される．

線形性

一般に，A を任意の 1 次変換を表す行列，$\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ を任意のベクトル，k を任意の実数とするとき

$$\begin{cases} A(k\overrightarrow{p})=kA(\overrightarrow{p}) \\ A(\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q})=A(\overrightarrow{p})+A(\overrightarrow{q}) \end{cases}$$

まとめて

$$A(\alpha\overrightarrow{p}+\beta\overrightarrow{q})=\alpha A\overrightarrow{p}+\beta A\overrightarrow{q} \quad (\alpha,\beta\text{は任意の実数})$$

すなわち

$$\alpha\overrightarrow{p}+\beta\overrightarrow{q}\xrightarrow{f}\alpha f(\overrightarrow{p})+\beta f(\overrightarrow{q})$$

一般に f は，$\overrightarrow{p}$ を $f(\overrightarrow{p})$ に，$\overrightarrow{q}$ を $f(\overrightarrow{q})$ に変えるだけの変換といえる．[注1)]

[注1)] 逆に f を xy 平面での写像とし，k は任意の実数，$\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ は一次独立なベクトルとするとき，

$$\begin{cases} f(k\overrightarrow{p})=k\,f(\overrightarrow{p}) \\ f(\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q})=f(\overrightarrow{p})+f(\overrightarrow{q}) \end{cases}$$

が成り立てば，f は，ある行列に対する 1 次変換であることも示せる．(**web 補充**)

2.1　線形性を見る ($ad - bc \neq 0$ の場合)

正則 ($ad - bc \fallingdotseq 0$) な 1 次変換と図形

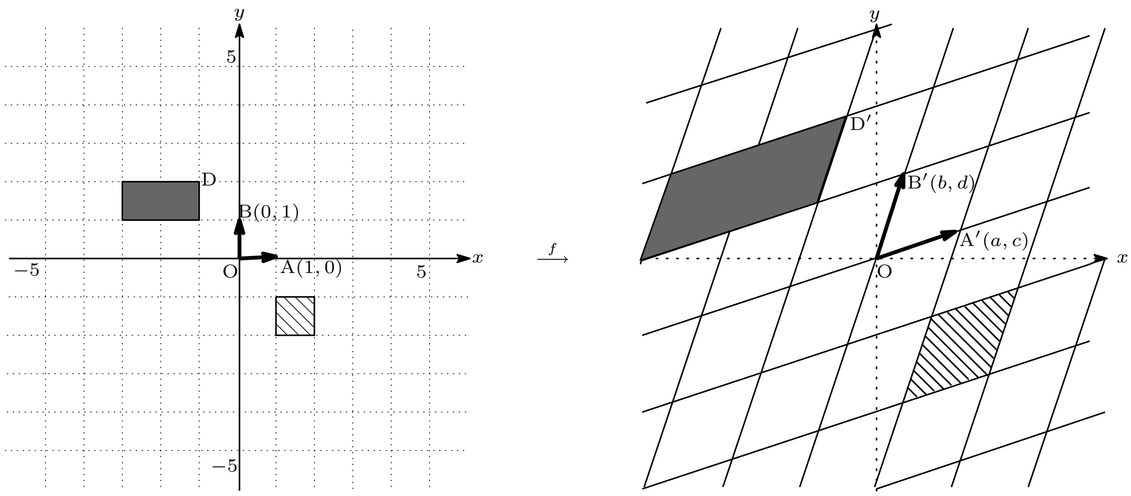
正則な 1 次変換によって
(1) 直線は直線に移る．特に原点を通る直線は原点を通る直線に移る．
(2) 平行な直線は平行な直線に移る．平行でない直線はやはり平行でない直線に移る．
(3) 線分 AB を $m : n$ に内分 (または外分) する点は，線分 A′B′ を $m : n$ に内分 (または外分) する点に移る．

これらは，すべて線形性:

$$A(\alpha\overrightarrow{p} + \beta\overrightarrow{q}) = \alpha A\overrightarrow{p} + \beta A\overrightarrow{q}$$

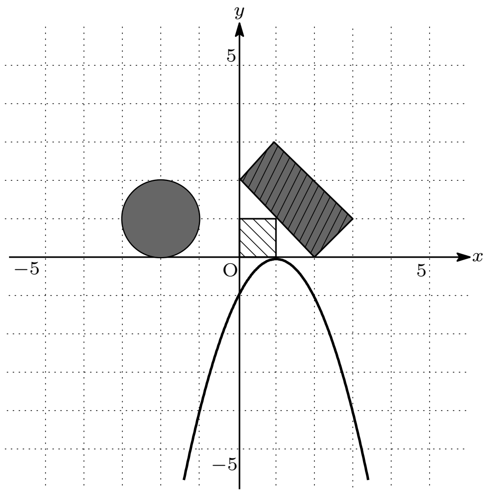
から証明することができる．(**web 補充**)

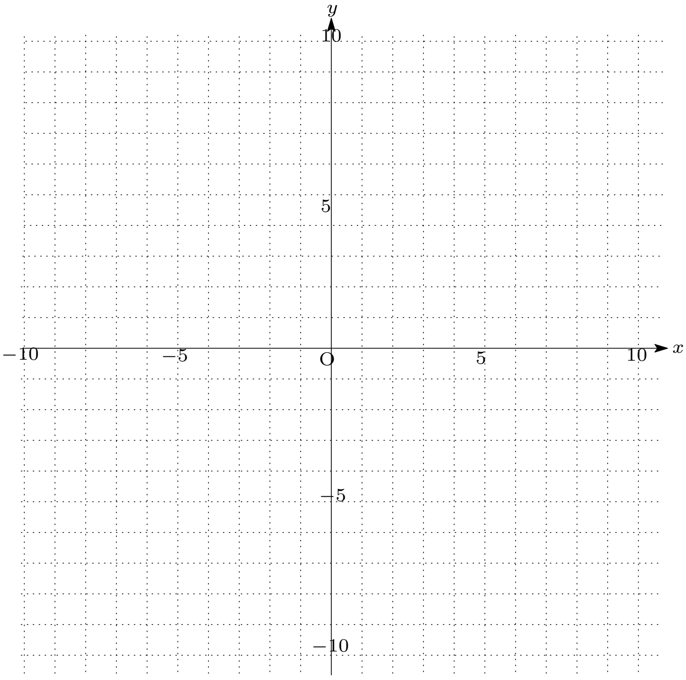
直感的にいうと，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ($ad - bc \fallingdotseq 0$) による一次変換は，$\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **で作られた網の目を，**$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$ **で作られる網の目に変えること**といえる．



問題 2-a (いろいろな図形の像)

行列 $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換を f とする．左図の三角形，平行四辺形，円, 放物線の f による像を，それぞれ右の方眼紙に書き込め．





チャレンジ問題

座標平面上に原点 O を重心とする三角形 ABC がある．1 次変換 f は，点 A を点 B に，点 B を点 A に，それぞれ移すとする．

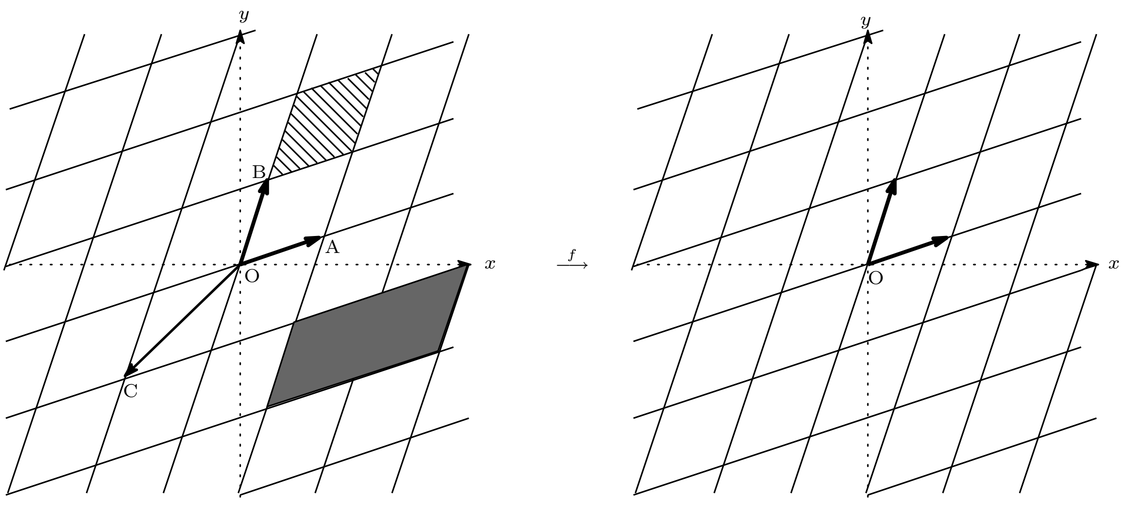
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ．

(2) f による点 C の像を求めよ．

(3) f による直線 OC の像を求めよ．

(4) f を表す行列を S とする．このとき，S^2 を求めよ．

[Let's try] f による左下図の図形の像を右下の方眼紙に書き込んで見よう．



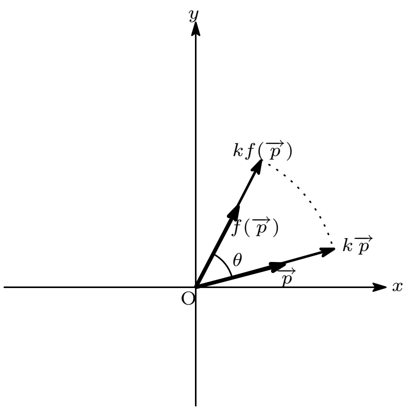
3 代表的な (正則)1 次変換 ($ad-bc\neq 0$ のとき)

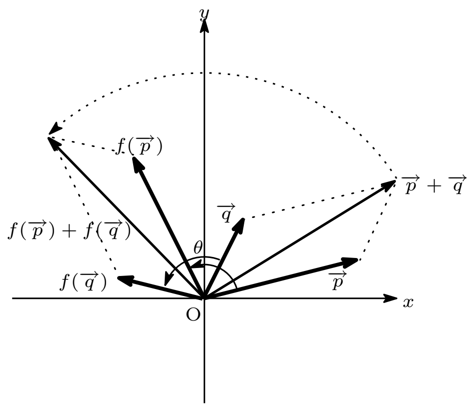
3.1 原点中心の拡大・縮小 (相似変換)

原点中心の k 倍の相似変換 ($x'=kx,\ y'=ky$) は，１次変換であり，それを表す行列は

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

3.2 原点中心の回転



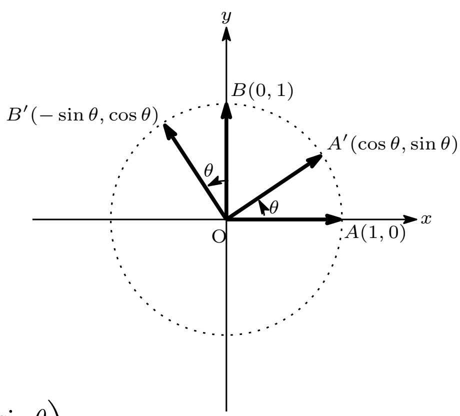


原点中心の回転を f とすると，上図より, 平面上の任意のベクトル $\overrightarrow{p},\overrightarrow{q}$ に対し，

$$\begin{cases} f(k\overrightarrow{p}) = k\,f(\overrightarrow{p}) \\ f(\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}) = f(\overrightarrow{p})+f(\overrightarrow{q}) \end{cases}$$

が成り立つので，f は１次変換である.

ゆえに, f を表す行列を R とすると, 左図より



$$R\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},$$

$$R\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(90^\circ+\theta) \\ \sin(90^\circ+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

よって原点中心の θ の回転を表す行列を $R(\theta)$ とすると

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

すなわち，直感的にいうと，$e_1=(1,0), e_2=(0,1)$ で作られる**網の目**を，$e_1'=(\cos\theta,\sin\theta), e_2'=(-\sin\theta,\cos\theta)$ で作られる**網の目**に変換するので，f は１次変換である.(**web 補充 3**)

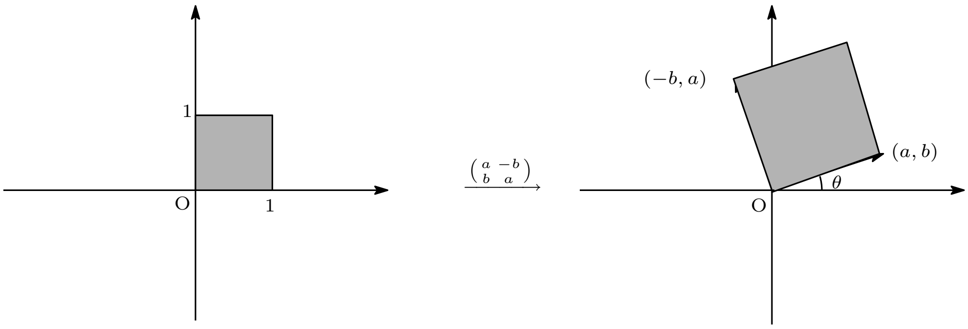
3.3 回転 ∘ 拡大

$a^2 + b^2 \neqq 0$ のとき,

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\left(\text{ただし}, \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

よって, $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ は,「原点中心の回転」と「原点中心の相似変換」の合成を表す行列である.

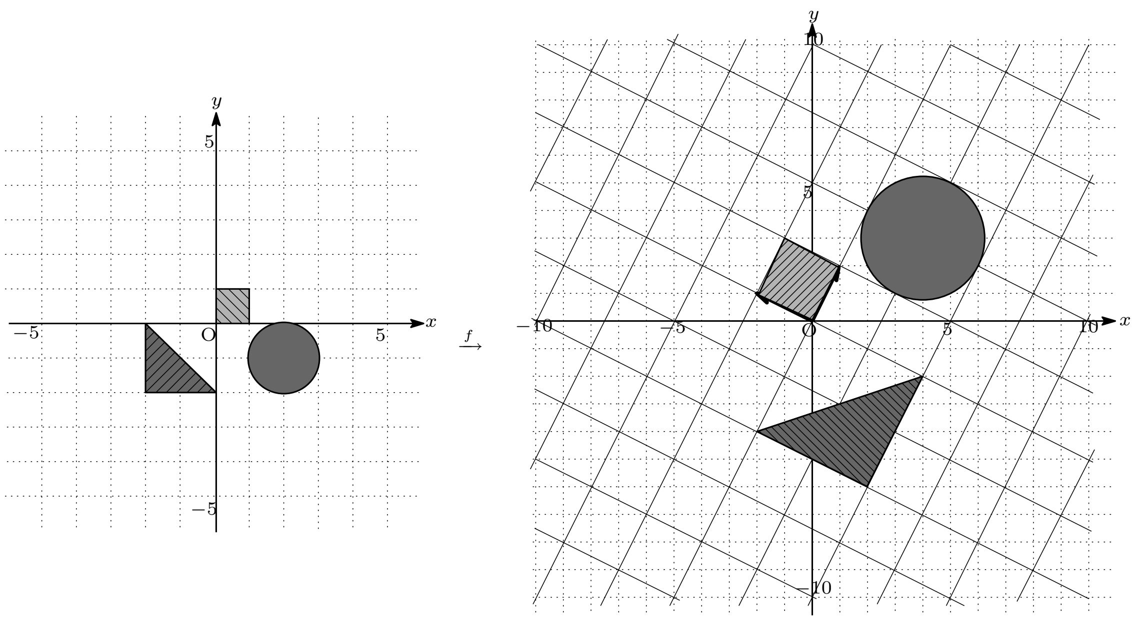


例 3-a $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ とすると, $A = 2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$

ゆえに, A は,「原点の周りに $\frac{\pi}{3}$ 回転し, 原点からの距離を 2 倍に拡大する 1 次変換」を表す.

例 3-b

f を $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換とする. 左の方眼紙に描かれている三角形, 平行四辺形, 円を, f によって移動した図形は, 右の様になる.



$A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の形の行列による 1 次変換は，原点の周りの 回転と相似変換の合成なので，**すべての図形を相似な図形に写す．特に，円は円に移し，また，２直線の間の角も変えない．**

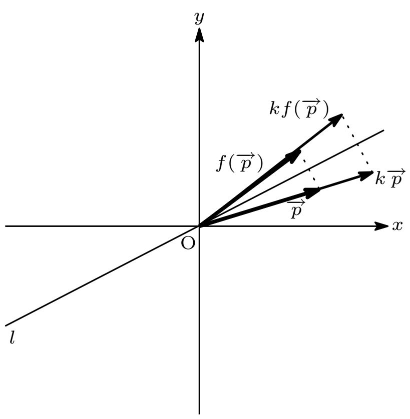
問題 3-a

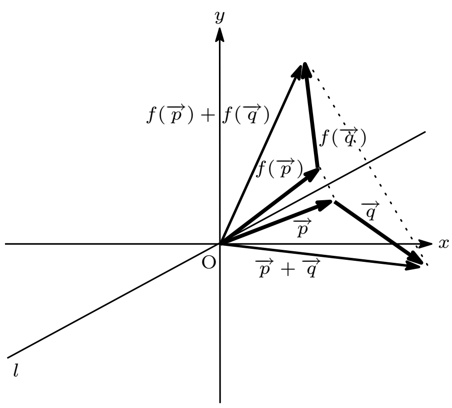
行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ で表される一次変換による，円 $(x-1)^2+y^2=1$ の像を求めよ．

問題 3-b

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^8$ を求めよ．

3.4 原点を通る直線に関する対称移動



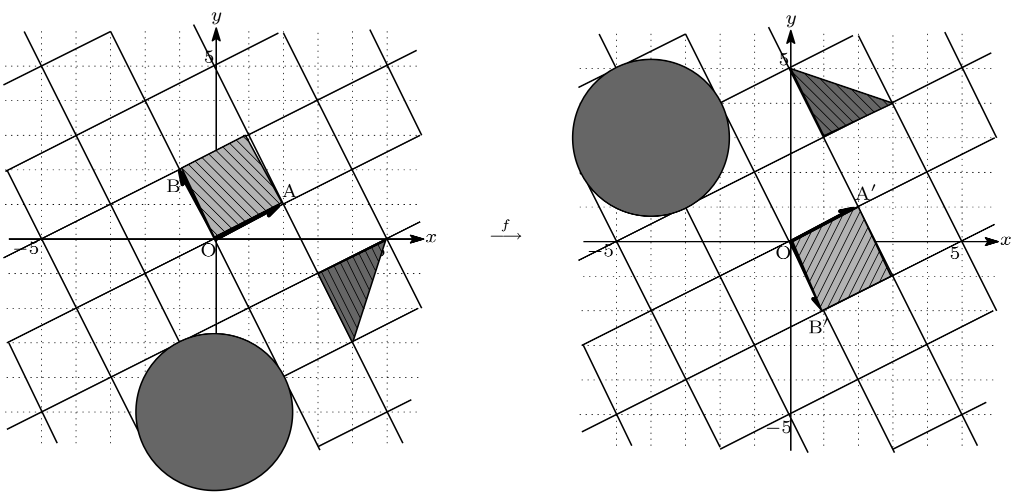


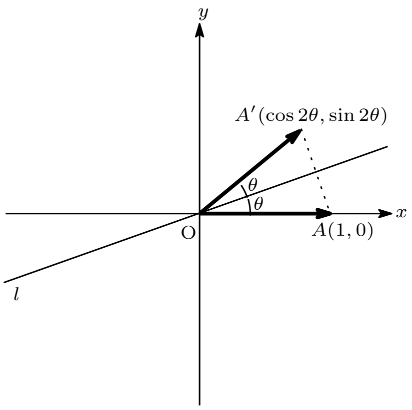
原点を通る直線 l : $y=\tan\theta$ に関する対称移動を f とすると，上図より, 平面上の任意のベクトル $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ に対し，

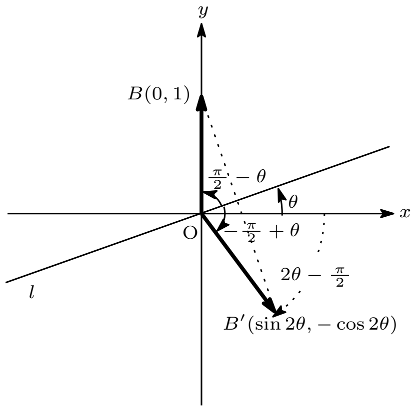
$$\begin{cases} f(k\overrightarrow{p}) = k\,f(\overrightarrow{p}) \\ f(\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}) = f(\overrightarrow{p}) + f(\overrightarrow{q}) \end{cases}$$

が成り立つので，f は 1 次変換である.

例 l : $y=\frac{1}{2}x$ に関する対称移動を f とする. l 上に点 A$(2,1)$, 原点を通り l と直行する直線:$y=-2x$ 上に 点 B$(-1,2)$ をとり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で **網の目** を作ると,「f は**網の目**を**網の目**に移し，原点を原点に移す」ので 1 次変換である.







f は一次変換となるから，f を表す行列を S，A$(1,0)$，B$(0,1)$ とし点 A,B の像を考えると，上図より $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}, \overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ と x 軸正方向とのなす角はそれぞれ，2θ, $2\theta-\frac{\pi}{2}$ となるので，[注2)]

$$S\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\theta\\ \sin 2\theta\end{pmatrix},\quad S\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin 2\theta\\ -\cos 2\theta\end{pmatrix}$$

よって，**原点を通る**直線に関する対称移動を表す行列は次のようになる．

原点を通る直線に関する対称移動

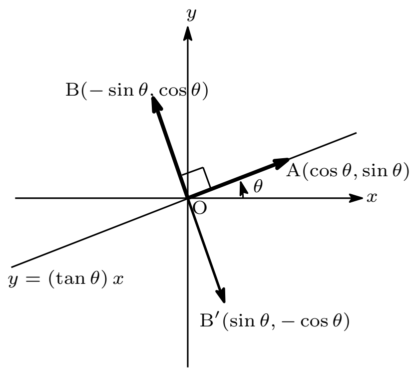
$y=\tan\theta$ に関する対称移動を表す行列を $S(\theta)$ とすると

$$S(\theta)=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}$$

【別証明】対称移動を表す行列の別の導き方

$l: y=\tan\theta$ に関する対称移動を f，$A(\cos\theta,\sin\theta), B(-\sin\theta,\cos\theta)$ とすると，A は l 上にあるので f によって動かない．また $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は l と直交するので，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の像は $(-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$．よって，

$$S\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix},\quad S\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix}$$



まとめて書くと

$$S\left(\begin{array}{c:c}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c:c}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{array}\right)$$

ゆえに

$$\begin{aligned}S&=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

[注2)] $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と x 軸正方向とのなす角は $\frac{\pi}{2}$，ここで $\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ と x 軸正方向とのなす角を x とすると，l が $\angle\mathrm{BOB'}$ の 2 等分線になるので，$\frac{\pi}{2}$ と x の平均が θ になる．よって，$\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}=\theta \Longleftrightarrow x=2\theta-\frac{\pi}{2}$．これからも $\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ と x 軸正方向とのなす角は求まる．

第 2 部への基本チェック

次の問題に答えよ.

問題 a

$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ で表される一次変換を f とする．$\mathrm{P}(1,p)$, $\mathrm{Q}(1,q)$ が f により，それぞれ P', Q' に移されるとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}//\overrightarrow{\mathrm{OP}'},\qquad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}//\overrightarrow{\mathrm{OQ}'}$$

が成り立つ．このとき，(1) p,q の値を求めよ．ただし $p<q$ とする.
(2) f による 直線 $l:y=mx$ の像が 直線 l となった．このとき m の値を求めよ．(注; このとき l を f による**不動直線**と言います.)

問題 b

$\mathrm{P}(3,1)$, $\mathrm{Q}(2,5)$ とする．三角形 OPQ の面積を求めよ.

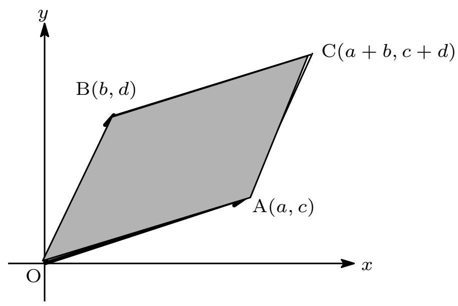
問題 c

$A=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ で表される一次変換を f とする．f によって 全平面はどのような図形に移るか.

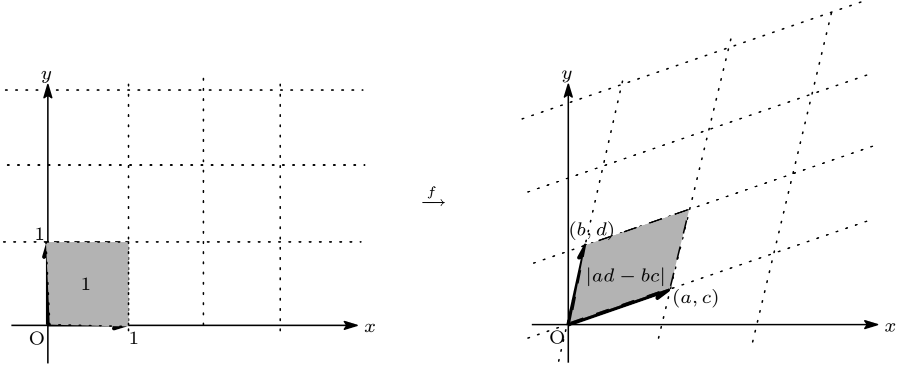
4　行列式と一次変換

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し $ad-bc$ を A の**行列式**と呼び，$det\,A$, $\Delta(A)$ などと表します．
一般に $\mathrm{A}(a,c)$, $\mathrm{B}(b,d)$ のとき，平行四辺形 OACB の面積を S とすると，

$$\begin{aligned} S &= \mathrm{OAOB}\sin\theta \\ &= \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2} \\ &= \sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)-(ab+cd)^2} \\ &= \sqrt{a^2d^2-2abcd+b^2c^2} \\ &= \sqrt{(ad-bc)^2} \\ &= |ad-bc| \\ &= |detA| \end{aligned}$$



単位正方形を，4 点 $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$ を頂点とする正方形とします．$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ による一次変換は, $(1,0)$ と $(0,1)$ で張られる**網の目**を, (a,c) と (b,d) で張られる**網の目**に移す変換なので，単位正方形の面積が $|ad-bc|=|detA|$ 倍に移ります．一般に図形の面積は,「単位正方形何枚分の大きさか？」で測るので，**他の一般の図形も全て 元の面積の** $|ad-bc|=|detA|$ **倍に移ります．**



また,

「$ad-bc=0 \longleftrightarrow$ ベクトル (a,c) と (b,d) で張られる図形の面積が 0」なので

行列式と平行

,$(a,c)\fallingdotseq(0,0)$, かつ $(b,d)\fallingdotseq(0,0)$ のとき,

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \iff a:b=c:d \iff ad-bc=0$$

同様に，$(a,b)\fallingdotseq(0,0)$, かつ $(b,d)\fallingdotseq(0,0)$ のとき,

$$(a,b)/\!/(c,d) \iff a:c=b:d \iff ad-bc=0$$

問題 4-a $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ で表される一次変換を f とする．円 $C:\,x^2+y^2=1$ の A による像を C' とするとき，C' の囲む領域の面積を求めよ．

5 線形性を見る ($ad-bc=0$ の場合)

問題 5-a

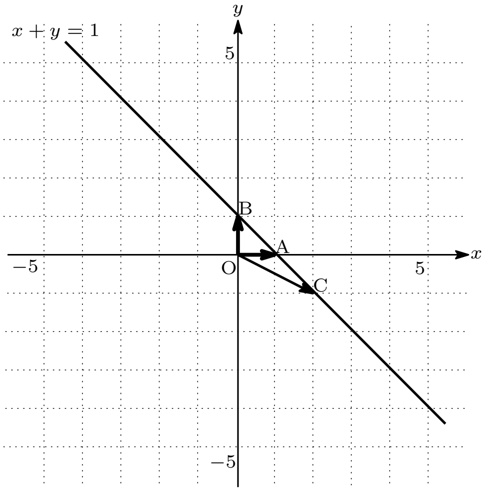
行列 $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を f とする.

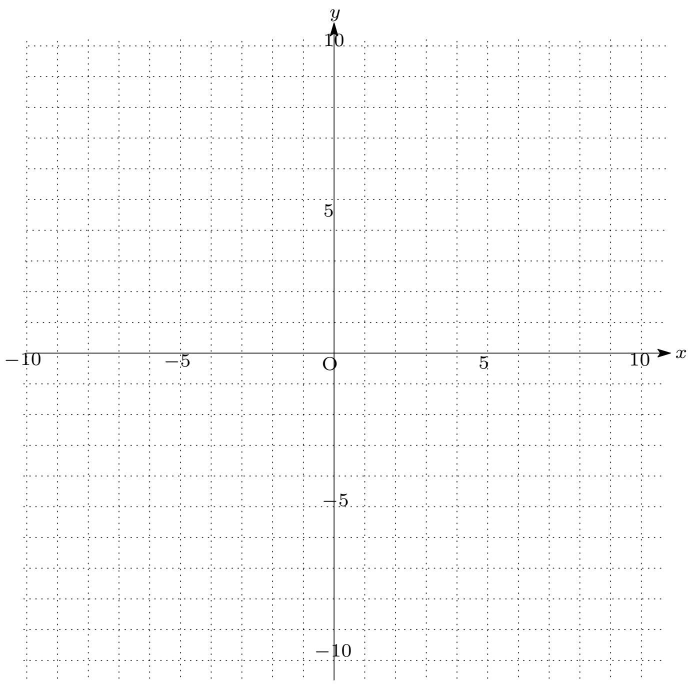
(1) 点 $\mathrm{A}(1,0), \mathrm{B}(0,1), \mathrm{C}(2,-1)$ の f による像を, 右の方眼紙に書き込め.

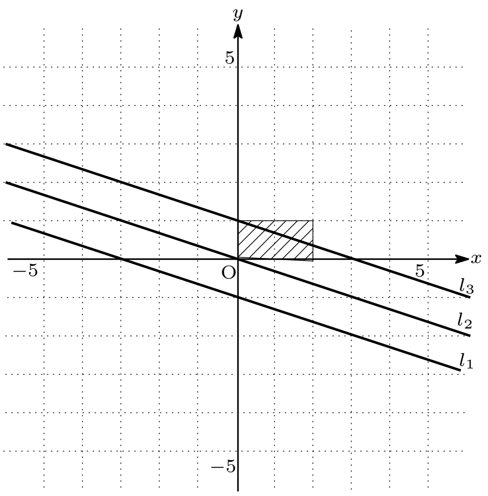
(2) 直線 $x+y=1$ の f による像を, 右に書き込め.

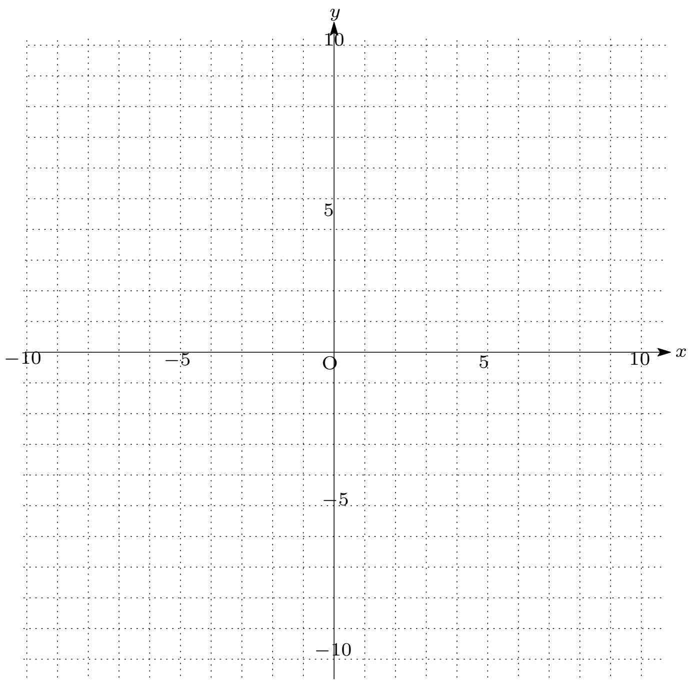
(3) 直線 $l_1 : x+3y=-3,\ l_2 : x+3y=0,\ l_3 : x+3y=3$ の f による像を, それぞれ 右に書き込め.

(4) 4 点 (0,0),(2,0),(2,1),(0,1) で囲まれる長方形の内部と周の f による像を, 右に書き込め.









$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$A \fallingdotseq\!\!\!\!/ O$ において，

$$ad-bc=0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \mathbin{/\!/} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, \text{または}, \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \text{か} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \text{の一方が 零ベクトル}$$

よって $(a,c) \neq (0,0)$ とすると $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ (αは実数) とかける. このとき, 線形性より

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A\left\{x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = xA\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+yA\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\
&= x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}+y\alpha\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \\
&= (x+\alpha y)\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

よって，全平面は原点を通り，方向ベクトルが $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ の直線に移ります．また，直線 $x+\alpha y=k$(k は定数) は一点 (ka,kc) につぶれてしまいます．　$(b,d) \neq (0,0)$ のときも同様です.
先の結果から次のことがわかります.

正則でない行列による図形の像

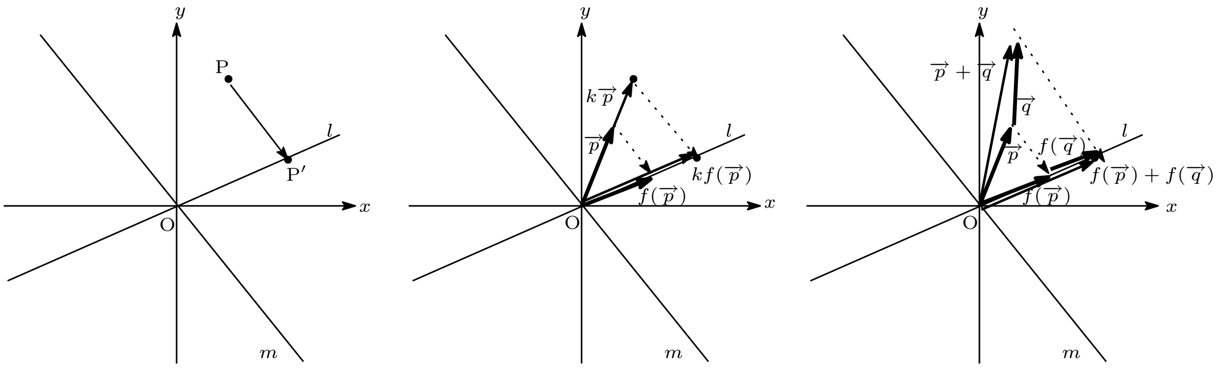
$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(ad-bc=0, A \neq O)$ によって

(1) 平面全体は，原点を通る直線 m に移る．
(2) 直線の像は，m 全体 または m 上の一点になる．(元の直線の傾きによって決定される)
(3) 円，四角形などの図形の像は，m 上の線分になる．

問題 5-b $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換を f とする.

(1) f によって，平面全体は，どのような図形に移るか？
(2) f によって，$y=ax$ が一点に移るとき，傾き a を求めよ.
(3) f によって，領域 $D: 0 \leqq y \leqq -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ はどのような図形に移るか？

5.1 射影変換 ($ad - bc = 0$ の代表例)



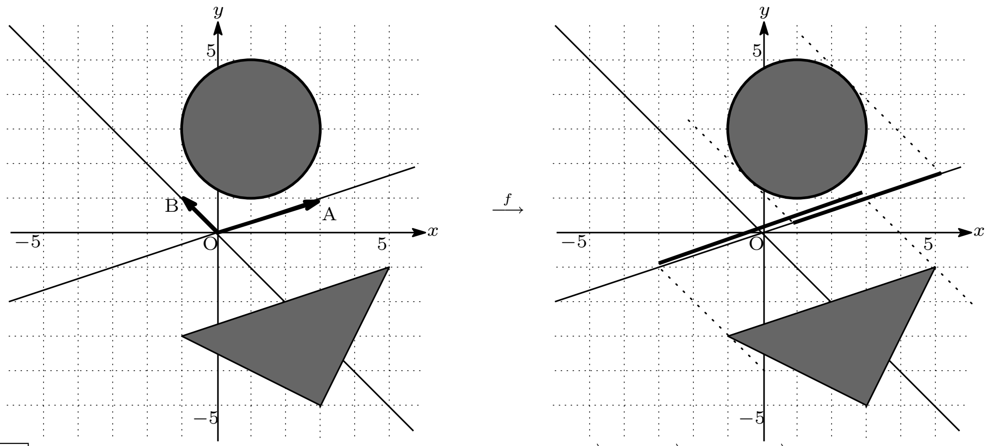
m, l を 互いに平行でない直線とするとき,「m に平行な 直線 l の上への**射影**」 というのは, 点 P に対し, P を通り m と平行な直線と直線 l の交点 P′ を対応させる変換のことです. 特に $l \perp m$ のとき,「直線 l の上への**正射影**」といいます. 上図より任意のベクトル $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ と任意の実数 k に対し

$$\begin{cases} f(\overrightarrow{kp}) = kf(\overrightarrow{p}) \\ f(\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}) = f(\overrightarrow{p}) + f(\overrightarrow{q}) \end{cases}$$

が成立するので, f は 1 次変換です.

例題

直線 $m: y=-x$ に平行な 直線 $l: y=\frac{1}{3}x$ への射影を f とする.
(1)f を表す行列をもとめよ.
(2) f によって，図の三角形や円盤はどのような図形に移るか？右の方眼紙に書き込め.



解答 (1) A$(3,1)$,B$(-1,1)$ とする．A は l 上にあるので, $f(\overrightarrow{\mathrm{OA}})=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$. 一方 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は m 上にあるので, $f(\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\overrightarrow{0}$. よって f を表す行列を P とおくと,

$$P\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\qquad P\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\cdots(*)\qquad\cdots(\text{答})$$

まとめて書くと

$$P\begin{pmatrix}3 & \vdots & -1\\1 & \vdots & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & \vdots & 0\\1 & \vdots & 0\end{pmatrix}$$

よって

$$P=\begin{pmatrix}3 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 3\\1 & 1\end{pmatrix}\qquad\cdots(\text{答})$$

(2) P(x,y) の像を P$'(x',y')$ とおくと，(1) より,

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 3\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{x+y}{4}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\qquad\cdots①$$

まず P が円内と円周上を動くとき, $x+y$ の取りえる範囲を求める．$x+y=k$ とおくと，この直線と円が共有点をもたないといけないから,「中心 $(1,3)$ との距離が 2 以下」．よって

$$\frac{|1+3-k|}{\sqrt{2}}\leqq 2\longleftrightarrow |k-4|\leqq 2\sqrt{2}\longleftrightarrow 4-2\sqrt{2}\leqq k\leqq 4+2\sqrt{2}$$

① より「$x'=\frac{3}{4}(x+y)$」だから，円の像は

$$y=\frac{1}{3}x\quad\left(3-\frac{3}{2}\sqrt{2}\leqq x\leqq 3+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$$

同様にして，三角形の像も求まるが，直接「目で」求めることもできる.

【注】(*) は, $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ が固有値 1 の固有ベクトル, $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ が固有値 0 の固有ベクトル であることを表している.

6 【発展】固有値と固有ベクトル

固有値と固有ベクトル

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ 但し\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \fallingdotseq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をみたす $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ の固有ベクトル，k をその固有値という．すなわち固有ベクトルとは，A によって方向の変わらない（長さが 0 でない) ベクトルである．固有ベクトルは A の不動直線の方向ベクトルになる．

問題 6-a

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

【解 1】(固有値から先に求める方法)　固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \fallingdotseq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} 2-k & 1 \\ 6 & 1-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \fallingdotseq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots ①$$

ここで $\left(\begin{smallmatrix} 2-k & 1 \\ 6 & 1-k \end{smallmatrix}\right)$ が逆行列を持てば，① より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-k & 1 \\ 6 & 1-k \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり矛盾する．よって

$$det\begin{pmatrix} 2-k & 1 \\ 6 & 1-k \end{pmatrix} = (2-k)(1-k) - 1\cdot 6 = k^2 - 3k - 4 = 0. \qquad \therefore k = -1, k = 4 \qquad \cdots ②$$

$k = -1$ **のとき** ① より

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \qquad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t_1\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$k = 4$ **のとき** ① より

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

以上から A の固有値は -1 と 4 となる．また対応する固有ベクトルは それぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} (固有値は -1)\ と\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (固有値は 4)$$

注3)

注3)　「固有ベクトル」といえば，通常は 定数倍を付けずに 1 つの例をあげればよい．

固有方程式

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \text{但し}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \fallingdotseq\!\!\!\!/ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つとき

$$\begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この行列が逆行列を持つと $x = y = 0$ となり矛盾するので

$$det\begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix} = (a-k)(d-k) - bc = k^2 - (a+d)k + (ad-bc) = 0 \qquad \cdots(*)$$

となることが必要である．(実は十分でもある.)

【解 2】(固有ベクトルを先に求める方法)

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \Longleftrightarrow a : b = c : d \Longleftrightarrow ad - bc = 0 \qquad (a^2 + c^2 \neq 0 \text{ かつ } b^2 + d^2 \neq 0 \text{ のとき})$$

を用いて，固有ベクトルの方を (上の * を) 先に求めることもできる．

固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ 6x+y \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots①$$

平行条件より

$$(2x+y) : (6x+y) = x : y \Longleftrightarrow (2x+y)y = (6x+y)x \Longleftrightarrow 6x^2 - xy - y^2 = (3x+y)(2x-y) = 0$$

ゆえに

$$y = -3x \text{ または } y = 2x$$

すなわち固有ベクトルは

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t_1\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ と } \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \cdots②$$

さらに

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

だから $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ の固有値は　それぞれ (-1) と 4 になる．

問題 6-b

次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$

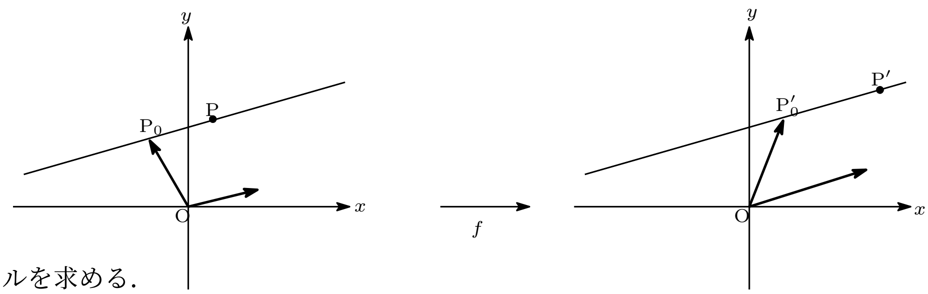
6.1 応用（その 1）− 不動直線

A によって動かない直線を求めるには「2 点の像」より「1 点と方向ベクトル」に注目した方がいいです．

$$l \text{ は } A \text{ の不動直線} \longleftrightarrow \begin{cases} l \text{ の方向ベクトルは, } A \text{ の固有値が } 0 \text{ でない固有ベクトル, かつ} \\ l \text{ 上の 1 点が } A \text{ によって } l \text{ 上に移る} \end{cases}$$

問題 6-c

行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ によって表される一次変換を f とする．
平面上の直線のうち f によって動かないものを全て求めよ．



(step1) 方向ベクトルを求める．
不動直線を l. l の方向ベクトルを $\overrightarrow{n}$ とすると，$\overrightarrow{n}$ は

$$A\overrightarrow{n} = k\overrightarrow{n}, \quad (\overrightarrow{n} \fallingdotseq \overrightarrow{0} \text{ かつ } A\overrightarrow{n} \fallingdotseq \overrightarrow{0})$$

をみたす．$\overrightarrow{n} = (a, b)$ とすると

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+b \\ 2a \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\therefore 2a^2 = b(-a+b) \Longleftrightarrow 2a^2 + ab - b^2 = (2a-b)(a+b) = 0 \Longleftrightarrow b = 2a, b = -a$$

ゆえに l の方向ベクトルは

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ または } \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

これらは $A\overrightarrow{n} \fallingdotseq \overrightarrow{0}$ をみたす．よって方向ベクトルとして適する．

(step2) さらに「l 上の一点 P_0 の像が l 上にある」条件を求めると良い．l の傾きは 2 または (-1) だから， l は $y = mx + n$ ($m = 2$ または $m = -1$) とおける．このとき $\mathrm{P}_0(0, n)$ の像は

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}$$

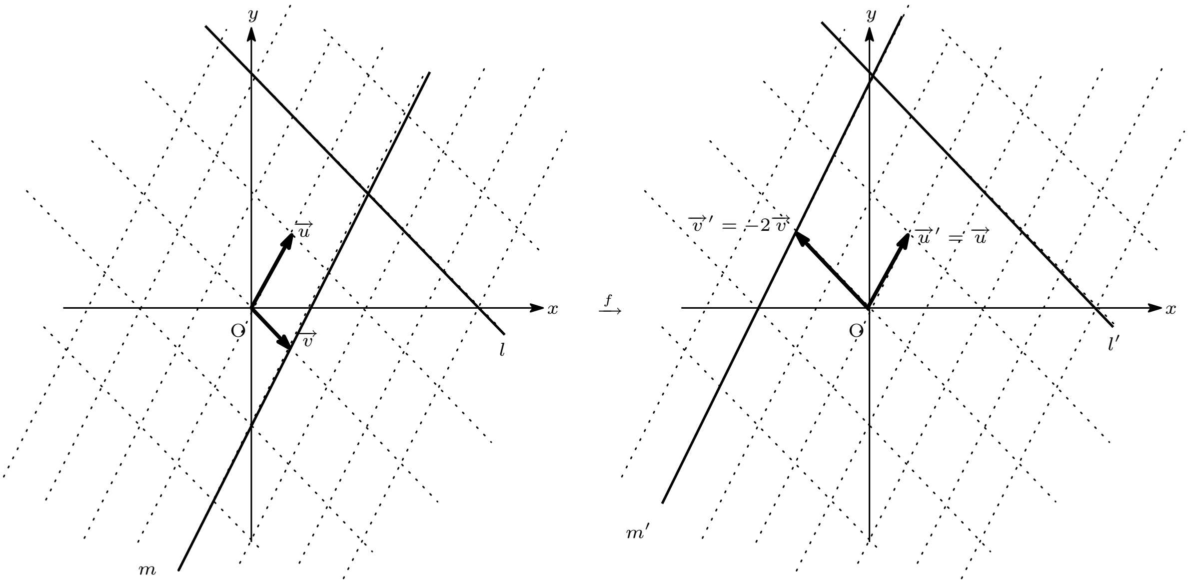
これが l 上にある条件は

$$0 = mn + n \Longleftrightarrow n = 0 \text{ または } m = -1$$

よって求める直線は

$$y = 2x \text{ または } y = -x + n \ (n \text{ は任意の実数}) \qquad \cdots(\text{答})$$

$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおいて，網の目を作ると，f による変換は,「$\overrightarrow{u}$ 方向への 1 倍の拡大」と「$\overrightarrow{v}$ 方向への (-2) 倍の拡大」 を表す．よって，下図より，$\overrightarrow{v}$ に平行な任意の直線は f によって動かないことが分かる．一方，$\overrightarrow{u}$ に平行で原点を通らない直線は原点からの距離が 2 倍になるので f によって動く．



問題 6-d

行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ によって表される一次変換を f とする．

(1) 原点を通る直線のうち f によって動かないものを全て求めよ．
(2) 平面上の直線のうち f によって動かないものを全て求めよ．

問題 6-e

次の行列で表される一次変換によって，自分自身に移される直線 (不動直線) を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

6.2　応用（その 2)–「$ad-bc=0$」と固有ベクトル

$ad-bc=0$ のとき，固有方程式は

$$x^2-(a+d)x=0 \longleftrightarrow x\{x-(a+d)\}=0$$

故に固有値は $x=0,\ x=a+d$ となり，必ず「**固有値が 0** の固有ベクトル」が存在します．$a+d \fallingdotseq 0$ のときは，固有ベクトルが 2 組でき，この固有ベクトルの組を基底にとると良く分かります．[注4)]

$ad-bc=0$ と固有ベクトル

問題 5-a の行列 $\begin{pmatrix}2 & 6\\1 & 3\end{pmatrix}$ について，固有ベクトルを使って，分析してみましょう．

A の固有方程式は,

$$x^2-5x=0. \qquad \therefore x=0,\ x=5$$

$x=0$ のとき

$$A-0E=\begin{pmatrix}2 & 6\\1 & 3\end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix}2 & 6\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$x=5$ のとき

$$A-5E=\begin{pmatrix}-3 & 6\\1 & -2\end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix}-3 & 6\\1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

ゆえに，固有ベクトルは

$$\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\ (\text{固有値は }0), \quad \overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\ (\text{固有値は }5)$$

一方，平面上の任意の点を P とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{u}+t\overrightarrow{v}$$

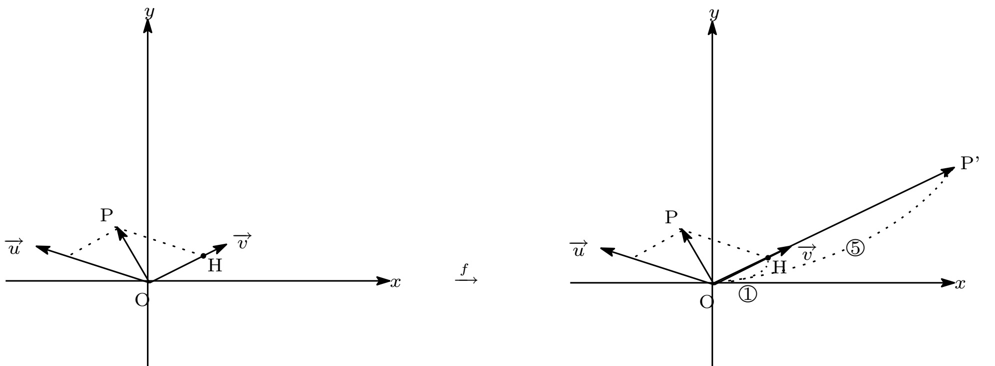
と表すことができる．点 P の像を P' とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=A\overrightarrow{\mathrm{OP}}=sA\overrightarrow{u}+tA\overrightarrow{v}=5t\overrightarrow{v}$$

すなわち，直線 $l: y=\frac{1}{2}x$ とすると，A による変換は

$\overrightarrow{v}$ に平行な l の上への射影と，原点を中心とする 5 倍の拡大の合成

となっていることが分かる．



$A\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0},\ A\overrightarrow{v}=5\overrightarrow{v}$

注4) $a+d=0$ の場合は 固有値が重解となり，固有ベクトルが一組しかなくなるので複雑です．そのような例としては $\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$ があります．

6.3 応用（その 3）– 行列の n 乗 (実固有ベクトルが 2 組ある場合)

固有ベクトルと n 乗

2 次の正方行列 A に対し,

$$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\cdots①,\qquad A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\cdots②$$

がなりたつ．このとき　自然数 n に対し，A^n を求めよ．

【解答】①,② より

$$A^n\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=2^n\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\cdots③,\qquad A^n\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=3^n\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\cdots④$$

まとめて書くと

$$A^n\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 2^n&3\cdot 3^n\\1\cdot 2^n&2\cdot 3^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}$$

よって

$$A^n=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2^{n+2}-3^{n+1}&-3\cdot 2^{n+1}+2\cdot 3^{n+1}\\2^{n+1}-2\cdot 3^n&-3\cdot 2^n+4\cdot 3^n\end{pmatrix}$$

対角化と固有ベクトル

行列 A の一次独立な (互いに平行でない) 固有ベクトルを $\overrightarrow{p}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{q}=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}$. その固有値を それぞれ α, β とすると,

$$A\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}$$

この 2 式をまとめて 変形すると

$$A\begin{pmatrix}p_1&q_1\\p_2&q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha p_1&\beta q_1\\\alpha p_2&\beta q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1&q_1\\p_2&q_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}$$

ゆえに $P=\left(\begin{smallmatrix}p_1&q_1\\p_2&q_2\end{smallmatrix}\right)$ とすると

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}\qquad\cdots(*)$$

となる．これを　A の**対角化** という.

6.4 応用（その 4)– 一次変換の分類

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有方程式は,

$$x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0 \qquad \cdots (*)$$

$A \fallingdotseq kE$ のとき，(*) の 2 解を α, β とすると，固有ベクトルは以下のようになります.

一次変換のタイプ ($A \fallingdotseq kE$ のとき)

$$\begin{cases} (\text{ア}) & \alpha, \beta \text{が異なる 2 実数解を持つとき,} & \text{独立な固有ベクトルは 2 つ} \\ (\text{イ}) & \alpha, \beta \text{が重解を持つとき,} & \text{独立な固有ベクトルは 1 つ} \\ (\text{ウ}) & \alpha, \beta \text{が虚数解を持つとき,} & \text{固有ベクトルはない} \end{cases}$$

注5)

この節で見たのは全て (ア) のタイプでした．(ウ) のタイプの代表例は 回転行列です.
$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ の固有方程式は,

$$x^2 - 2\cos\theta + 1 = 0$$

ゆえに

$$x = \cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta - 1} = \cos\theta + \sqrt{-\sin^2\theta}$$

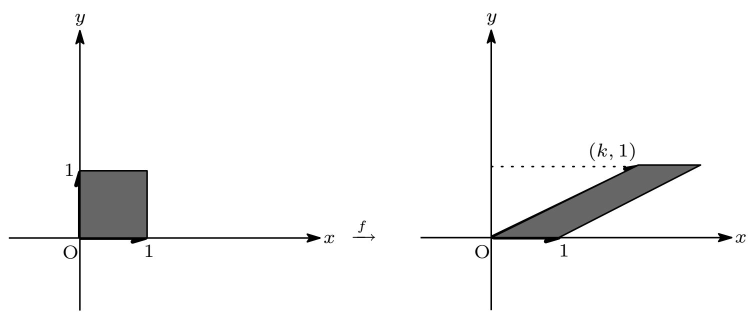
ゆえに，$\sin\theta = 0$ $(\theta = 0, \pi)$ のとき以外は固有ベクトルはありません.

(イ) のタイプの代表例は,「ずらし変換」$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(k \fallingdotseq 0)$ です．これは x 軸方向への「ずらし」を表しています. 注6)

固有方程式は,

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

よって固有値は $x = 1$ (重解) です.
さらに



$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ゆえに 固有ベクトルは 1 つしかなく,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

注5) 以上は実数の範囲での話しです．大学レベルでは虚数成分の固有ベクトルも考えます. また $A = kE$ のときは (*) は重解を持ちますが，固有ベクトルは無数にあります.

注6) y 軸方向への「ずらし」を表す行列は $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ $(k \fallingdotseq 0)$ です.

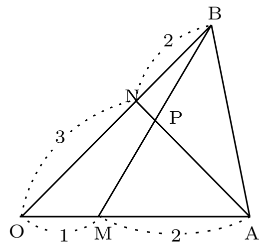
7 ベクトルの問題への応用

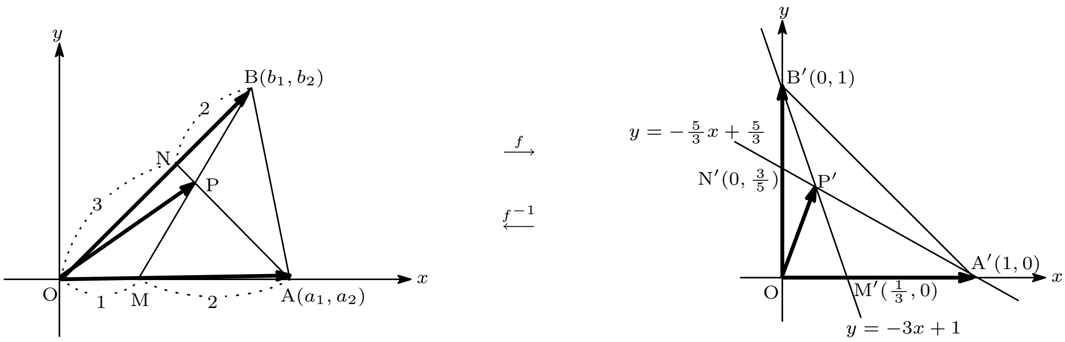
線形性を利用すると，次の問題をすぐ解くことができます.

例題

$\triangle$OAB で，線分 OA を 1 : 2 に内分する点を M, 線分 OB を 3 : 2 に内分する点を N とし，直線 AN と直線 BM の交点を P とする.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$で表せ.





点 O が原点にくるように座標系をとったとき，点 $\mathrm{A}(a_1, a_2)$, 点 $\mathrm{B}(b_1, b_2)$ となったとする．このとき，f を 点 A が $\mathrm{A}'(1,0)$, 点 B が $\mathrm{B}'(0,1)$ になるような 1 次変換とすると, 線形性より M の像 M$'$ は 線分 OA$'$ を 1 : 2 に内分する点, N の像 N$'$ は 線分 OB$'$ を 3 : 2 に内分する点となるので, M$'$,N$'$ の成分は,

$$\mathrm{M}'\left(\frac{1}{3}, 0\right), \quad \mathrm{N}'\left(0, \frac{3}{5}\right)$$

また 1 次変換により, 直線は直線に，交点は交点に移るので, P は直線 A$'$N$'$ と 直線 B$'$M$'$ の交点 P$'$ にうつる．ここで,

$$\begin{cases} \mathrm{AN}: & y = -\frac{3}{5}x + \frac{3}{5} \\ \mathrm{BM}: & y = -3x + 1 \end{cases}$$

この連立方程式を解いて

$$\mathrm{P'}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}}' + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}'$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立なので，f は逆変換 f^{-1} を持つ．よって，f^{-1} の線形性より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots(答)$$

8 補充

【補充 1】線型性

定理

f を xy 平面での写像，k は任意の実数，$\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ はある一次独立なベクトルの組として

$$\begin{cases} f(k\overrightarrow{p}) = k\,f(\overrightarrow{p}) \\ f(\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}) = f(\overrightarrow{p}) + f(\overrightarrow{q}) \end{cases}$$

が成り立てば，f は，ある行列に対する 1 次変換である．

【証明】(i) $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して線形性が成り立つとき

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x\,f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\,f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots ①$$

よって，$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$，$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \cdots ②$$

(ii) 一般の場合は，$\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ は一次独立なベクトルだから，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11}\overrightarrow{p} + a_{12}\overrightarrow{q},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_{21}\overrightarrow{p} + a_{22}\overrightarrow{q} \qquad \cdots ③$$

をみたす a_{ij} が存在する．よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x(a_{11}\overrightarrow{p} + a_{12}\overrightarrow{q}) + y(a_{21}\overrightarrow{p} + a_{22}\overrightarrow{q})$$

$\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ に対する線形性より

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= x(a_{11}f(\overrightarrow{p}) + a_{12}f(\overrightarrow{q})) + y(a_{21}f(\overrightarrow{p}) + a_{22}f(\overrightarrow{q})) \\ &= xf(a_{11}\overrightarrow{p} + a_{12}\overrightarrow{q}) + yf(a_{21}\overrightarrow{p} + a_{22}\overrightarrow{q}) \\ &= x\,f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\,f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって ① が成り立つので，② も成り立つ．以上から定理は証明された．

Comment

ここのポイントは，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ で ③ のように表されるということである．このとき，$\alpha\overrightarrow{p} + \beta\overrightarrow{q}$ の全体は，平面ベクトル全体を表すので，結局，任意の平面ベクトルに対し線形性が成り立つことになる．
この定理より，f が**ある網の目**を，網の目に移す変換であるとき，f は 1 次変換といえる．(**全ての種類の網の目**が，網の目に移ることを確かめる必要はない.)

【補充 2】

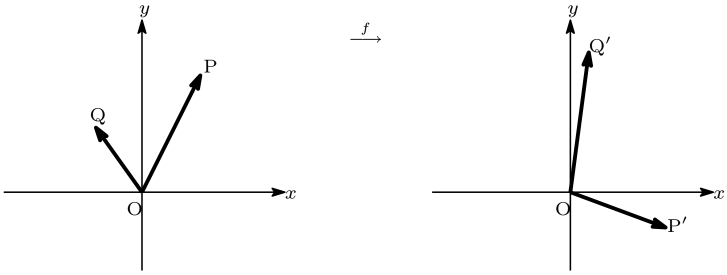
$ad-bc \fallingdotseq 0$ のときの１次変換の性質

(1) 直線は直線に移る．特に原点を通る直線は原点を通る直線に移る．
(2) 平行な直線は平行な直線に移る．平行でない直線はやはり平行でない直線に移る．
(3) 線分 AB を $m:n$ に内分 (または外分) する点は，線分 A′B′ を $m:n$ に内分 (または外分) する点に移る．

【証明】線形性：

$$\begin{cases} f(k\overrightarrow{p}) = kf(\overrightarrow{p}) & \cdots(\text{ア}) \\ f(\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}) = f(\overrightarrow{p})+f(\overrightarrow{q}) & \cdots(\text{イ}) \end{cases}$$

(i) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(ad-bc \fallingdotseq 0)$ の表す変換を f とすると A^{-1} が存在するので「点 P とその像 P′ は 1 対 1 に対応する．すなわち，点 Q が異なるならば，その像 P′ と Q′ も異なる．また像 P′ と Q′ が異なるならば，その原像 P と Q も異なる．とくに点 P が原点と異なるときは，その像は原点に移らない」

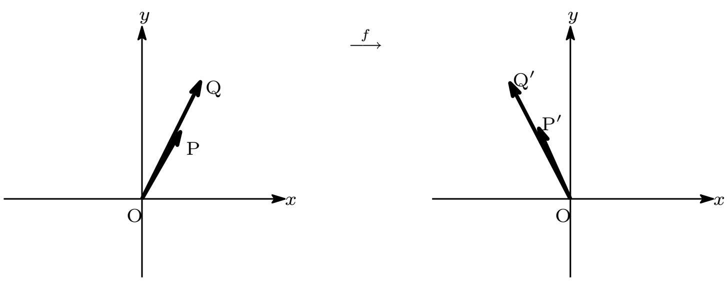


(ii) 「平行なベクトルは，互いに平行なベクトルに移り，平行でないベクトルは平行でないベクトルに移る.」ことを証明する． (i) より $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{q} \Longleftrightarrow f(\overrightarrow{\mathrm{p}})=f(\overrightarrow{\mathrm{q}})$ であるから, 線形性 (ア) から

$$\overrightarrow{a}\,/\!/\,\overrightarrow{b} \Longleftrightarrow \overrightarrow{b}=k\overrightarrow{a} \Longleftrightarrow f(\overrightarrow{b})=f(k\overrightarrow{a}) \Longleftrightarrow f(\overrightarrow{b})=k\,f(\overrightarrow{a}) \Longleftrightarrow f(\overrightarrow{b})/\!/f(\overrightarrow{a})$$

すなわち,

$$\overrightarrow{p}\,/\!/\,\overrightarrow{q} \Longleftrightarrow f(\overrightarrow{p})/\!/f(\overrightarrow{q})$$



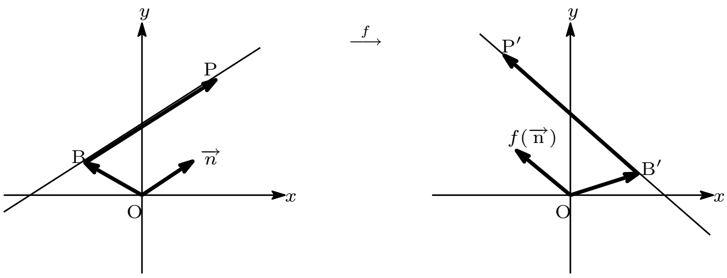
(iii) 点 B を通り，方向ベクトルが $\overrightarrow{n}$ の直線上の点を P とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{n}$$

点 P, 点 B の像を P′,B′ とする．線形性 (ア),(イ) より

$$f(\overrightarrow{\mathrm{OP}})=f(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{n})=f(\overrightarrow{\mathrm{OB}})+t\,f(\overrightarrow{n}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}}'=\overrightarrow{\mathrm{OB}}'+t\,f(\overrightarrow{n}) \qquad \cdots①$$

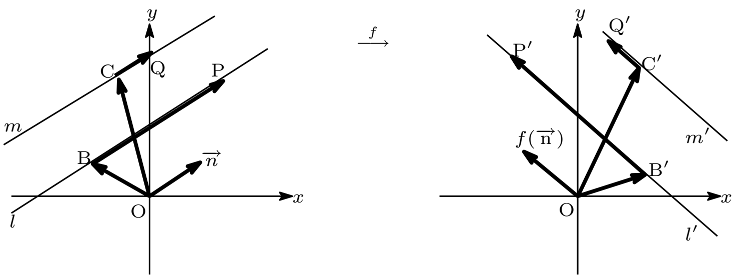
(i) より，$f(\overrightarrow{n}) \fallingdotseq \overrightarrow{0}$ だから，直線の像は直線である．



次に 2 つの直線 l,m がそれぞれ，点 B, 点 C を通り，ともに $\overrightarrow{n}$ に平行とする．P,Q をそれぞれ l,m 上の点とすると，① と同様にして

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OP}}' = \overrightarrow{\mathrm{OB}}' + t\, f(\overrightarrow{n}) \\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}' = \overrightarrow{\mathrm{OC}}' + s\, f(\overrightarrow{n}) \end{cases} \qquad (s, t \text{ は実数})$$

よって，$l/\!/m$ のとき，l と m の像も平行となる．また，(ii) より，平行でない直線は平行でない直線に移る．



(iv) 最後に，点 P が線分 AB を $t:(1-t)$ に内分する点とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

線形性 (ア),(イ) より

$$f(\overrightarrow{\mathrm{OP}}) = (1-t)\, f(\overrightarrow{\mathrm{OA}}) + t\, f(\overrightarrow{\mathrm{OB}}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}}' = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}' + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}'$$

よって，P の像 P′ は，線分 A′B′ をやはり $t:(1-t)$ に内分する．外分のときも同様．以上からすべて証明された．

Comment

$ad-bc=0$ のとき，(i) の部分が成り立たないので，平面全体は原点を通る直線につぶれる．よって，原点を通らない直線も，原点を通る直線に移る (または 1点につぶれる)．また平行でない直線も，平行な直線に移る (または 1点につぶれる)．

【補充 3】明日 のために
余白ができたので，発展した話題も付け加えます．１次変換の特徴を見るには，そうでない変換を考えてみることが良いです．

一般の変換の例

次の変換

$$f:\begin{cases} x' = x^2 \\ y' = 2y \end{cases}$$

による半直線: $x=0,\ x=1,\ x=2,\ x=3$ (ただし $y \geqq 0$) と $y=0,\ y=1,\ y=2$ (ただし $x \geqq 0$) の像を求め図示せよ．さらに，線分 $x+y=1$, $x+y=2$, 半直線: $y=x$ (ただし $x \geqq 0, y \geqq 0$) の像を求め図示せよ．

この変換 f は (２次式を含むので) １次変換ではありません．さて，直線 $x=3$ 上の点 P は $\mathrm{P}(3,t)$ ($t \geqq 0$) とおける．このとき

$$\begin{cases} x' = 3^2 = 9 \\ y' = 2t \end{cases}$$

よって 半直線 $x=3$ の像は, 半直線 $x'=9$ ($y' \geqq 0$) です．同様にして，半直線 $x=0, x=1, x=2$ の像は, それぞれ $x'=0, x'=1, x'=4$ (すべて $y' \geqq 0$) です．つぎに直線 $y=3$ 上の点 P を $\mathrm{P}(t,3)$ ($t \geqq 0$) とおくと,

$$\begin{cases} x' = t^2 \\ y' = 6 \end{cases}$$

よって 半直線 : $y=3$ の像は, 半直線: $y'=6$ ($x' \geqq 0$) です．同様に，半直線 : $y=0, y=1, y=2$ ($x \geqq 0$) の像はそれぞれ，半直線 : $y'=0, y'=2, y'=4$(すべて $x' \geqq 0$) となります．では，線分 : $x+y=2$ ($x \geqq 0, y \geqq 0$) の像はどうなるでしょうか ？ 今度は $\mathrm{P}(t, 2-t)$ ($0 \leqq t \leqq 2$) とおけます．このとき,

$$\begin{cases} x' = t^2 \\ y' = 2(2-t) \end{cases}$$

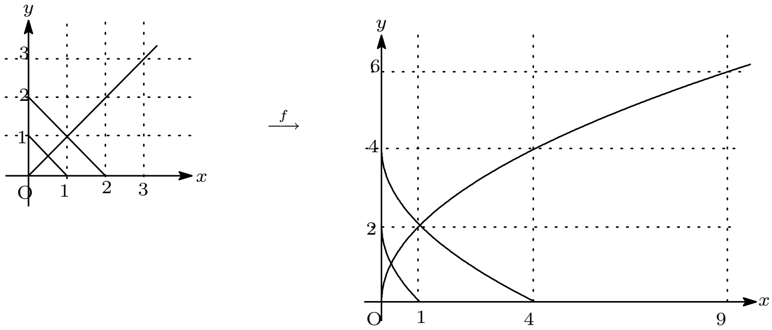
t を消去して

$$x' = \frac{1}{4}(y'-4)^2 \ (\text{ただし}, 0 \leqq y' \leqq 4)$$

すなわち直線の像が直線になりません．同様，: $x+y=1$ ($x \geqq 0, y \geqq 0$) の像は $x' = \frac{1}{4}(y'-2)^2$ ($0 \leqq y' \leqq 2$ となり，半直線:$y=x$ ($x \geqq 0$) の像は,

$$\begin{cases} x' = t^2 \\ y' = 2t \end{cases} \longrightarrow x' = \frac{y'^2}{4} \ (y' \geqq 0)$$

と, これまた直線の像が直線になりません．これは線形性が成り立たないためです．(この例では，正方形の**網の目**は，長方形の**網の目**に移っていますが，一般には，この網の目も曲線で作られることになります．)



しかし，**曲線も，局所的には接線（「１次関数」）で近似できるように，f も 局所的には「1 次変換」で近似できます．** $(x, y) = (1, 1)$ の近くで，f を近似する 1 次変換を求めてみましょう．$x' = x^2$ の $x = 1$ に於ける接線は

$$x' = 2(x-1) + 1$$

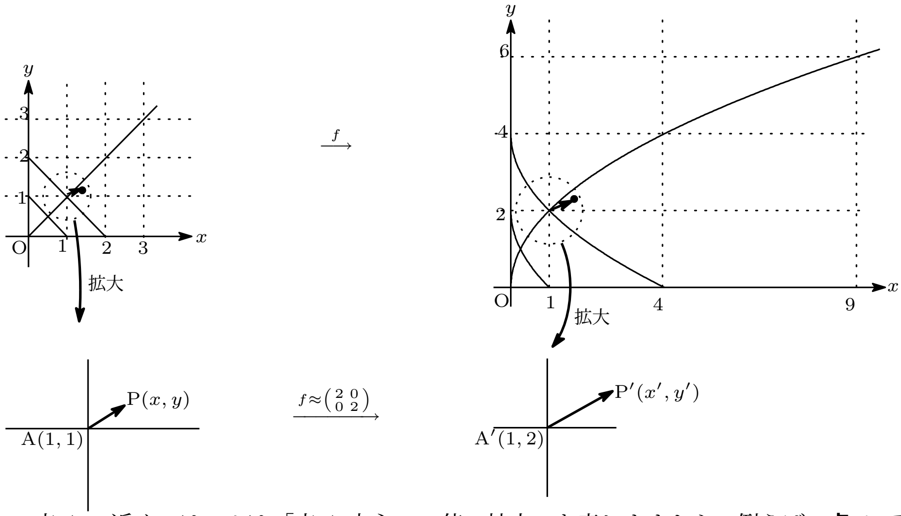
よって，$(x, y) = (1, 1)$ の近くでは，f は

$$\begin{cases} x' = 2(x-1)+1 \\ y' = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} x'-1 = 2(x-1) \\ y'-2 = 2(y-1) \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x'-1 \\ y'-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

と近似できます．これは，$\mathrm{A}(1,1)$ とすると，その像が $\mathrm{A}'(1,2)$ となることから，$\mathrm{P}(x,y)$ が A に近いとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{A'P'}} \approx \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \overrightarrow{\mathrm{AP}} \iff \overrightarrow{\mathrm{A'P'}} \approx 2\overrightarrow{\mathrm{AP}} \qquad \cdots①$$

となることを表しています．注7)



すなわち，点 A の近くでは，f は,「点 A 中心の 2 倍の拡大」を表しますから，例えば，**点 A で交わる 2 本の曲線のなす角は変えません．** 実際，A において，直線 $x + y = 2$ と $y = x$ は直交しますから A' において，2 つの放物線も直交します．注8)
このように，どのような変換に対しても (微分可能であれば) 各点の近くでは 1 次変換で近似することができます．そして,「微分を利用して各点の近くの接線が求まれば，曲線全体の形がわかる」のと同様に,「各点の近くでの変換の様子を調べることによって変換全体の様子を調べる」ことができます．1 次変換は，この他にも無数に応用されます．

注7) 確かめてみましょう．$\mathrm{P}(x,y) = (1.1, 1.2)$ のとき，f の式から

$$\begin{cases} x' = 1.1^2 = 1.21 \\ y' = 2 \times 1.2 = 2.4 \end{cases} \iff \begin{cases} x'-1 = 0.21 = 2(x-1) + 0.01 \\ y'-2 = 0.4 = 2(y-1) \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x'-1 \\ y'-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0 \end{pmatrix}$$

たしかに，かなり正確に近似されています．

注8) $C_1 : x = \frac{1}{4}(y-4)^2$, $C_2 : x = \frac{y^2}{4}$ とする．C_1, C_2 の式をそれぞれ y に関し微分して，

$$C_1\text{に関し}: \frac{dx}{dy} = \frac{y-4}{2}, \qquad C_2\text{に関し}: \frac{dx}{dy} = \frac{y}{2}$$

ゆえに, 点 $\mathrm{A}'(1,2)$ におけるそれぞれの接線の傾きは

$$C_1\text{では}, \ \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y-4}\bigg|_{y=2} = -1, \qquad C_2\text{では}, \ \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}\bigg|_{y=2} = 1.$$

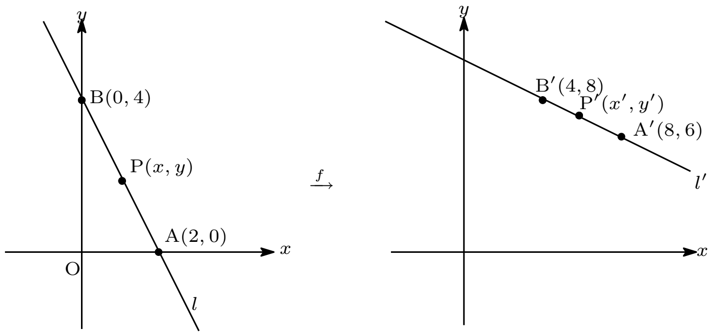
よって，点 A' において C_1 と C_2 は直交する．また，$y = x$ と $x = 1$ や $y = 1$ とのなす角はともに $\frac{\pi}{4}$ ですから，A' において，C_2' と $y = 2$, $x = 1$ とのなす角も $\frac{\pi}{4}$ になっている．

9 【解答】

$\boxed{\textbf{問題 0-a}}$ 一次変換は，平行な直線を平行な直線に移し，かつ同一直線上にある点の比も保存する．よって **図 3**

$\boxed{\textbf{問題 0-b}}$ **【解 1】2 点の像に注目する**
$2x+y=4$ 上に 2 点 A$(2,0)$,B$(0,4)$ をとる．f による像はそれぞれ A$'(8,6)$ と B$'(4,8)$．「逆行列を持つ行列による一次変換は，直線を直線に移す」ので，l の像は A$'$B$'$ となる．すなわち，

$$y-6=-\frac{1}{2}(x-8) \longleftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+10$$



【解 2】逆変換を利用する
l の点 P(x,y) の像を P$'(x',y')$ とすると，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

よって

$$x=\frac{2x'-y'}{5}, \qquad y=\frac{-3x'+4y'}{5}$$

$2x+y=4$ へ代入して

$$2\times\frac{2x'-y'}{5}+\frac{-3x'+4y'}{5}=4 \longleftrightarrow x'+2y'=20$$

ゆえに l' の式は

$$x+2y=20$$

$\boxed{\textbf{問題 0-c}}$ **【解】1 点と方向ベクトルの像に注目する**l 上の点 P(x,y) の像を P$'(x',y')$ とすると，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって l' の媒介変数表示は,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

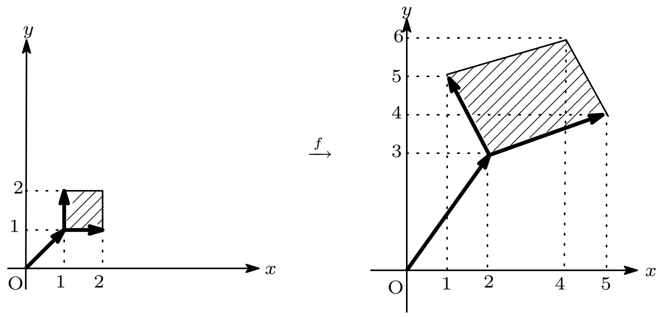
問題 0-d 正方形 PQRS の周および内部の点を $\mathrm{P}(x,y)$ とすると，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + s\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + t\overrightarrow{\mathrm{PS}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ (0 \leqq s \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq 1) \qquad \cdots ①$$

よって P の像を $\mathrm{P}'(x', y')$ とすると，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \cdots ②$$

「$0 \leqq s \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq 1$」だから，4 点 $(2,3), (5,4), (4,6), (1,5)$ を頂点とする平行四辺形の周および内部



$ad-bc \fallingdotseq 0$ のとき，直線の像を求めるには次のような方法がある．（この他, 媒介変数を利用する方法などがある.）

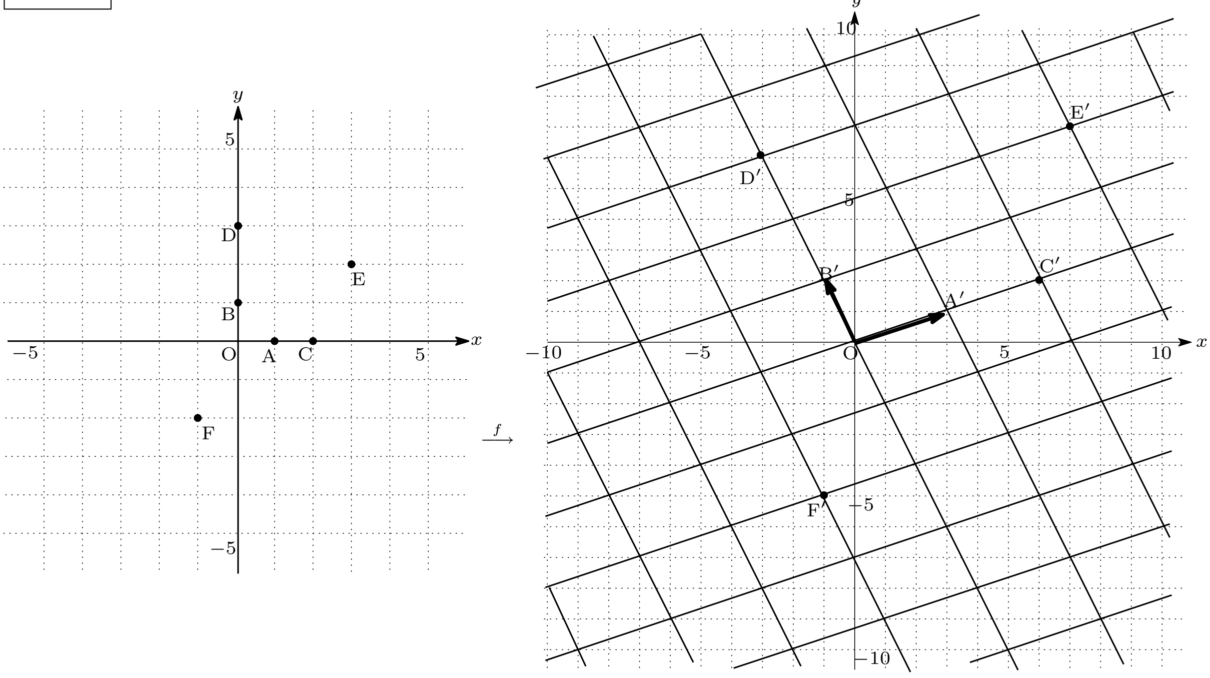
直線の像 ($ad-bc \fallingdotseq 0$) のとき

(1) 2 点の像を考える

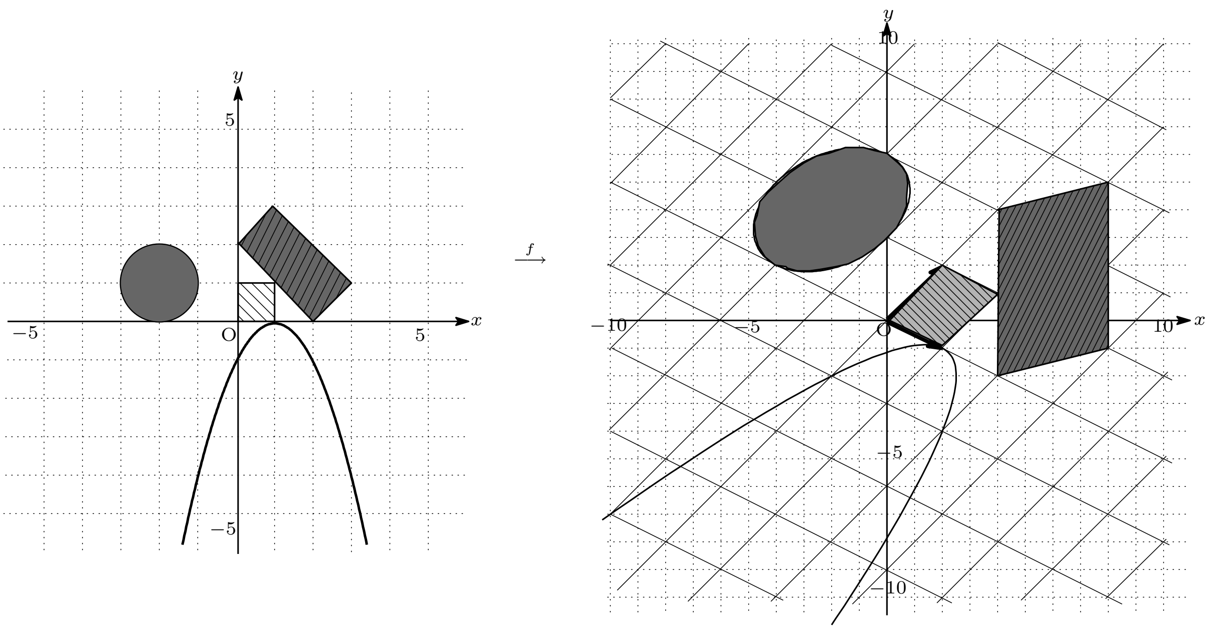
(2) 逆変換を利用する

(3) 1 点と方向ベクトルの像を考える

問題 1-a



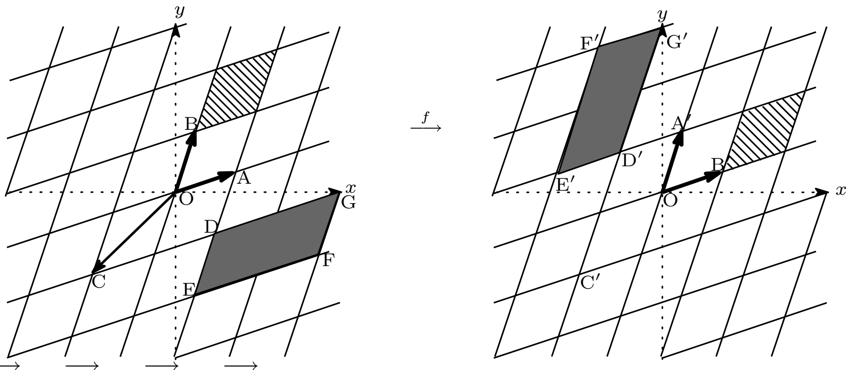
問題 2-a



チャレンジ問題 (1) ともに平行四辺形だから頂点の像を求めればよい．図のように点 D,E,F,G をとると，

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} & \xrightarrow{f} \overrightarrow{\mathrm{OD}}' = \overrightarrow{\mathrm{OA}}' - \overrightarrow{\mathrm{OB}}' \\ \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} - 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} & \xrightarrow{f} \overrightarrow{\mathrm{OE}}' = \overrightarrow{\mathrm{OA}}' - 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ \overrightarrow{\mathrm{OF}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}} - 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} & \xrightarrow{f} \overrightarrow{\mathrm{OF}}' = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}}' - 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}' \\ \overrightarrow{\mathrm{OG}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} & \xrightarrow{f} \overrightarrow{\mathrm{OG}}' = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}}' - \overrightarrow{\mathrm{OB}}' \end{cases}$$

もうひとつの四角形に対しても同様だから，下図のようになる．



(2) $f(\overrightarrow{\mathrm{OA}}) = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $f(\overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ だから，

$$\begin{cases} f(f(\overrightarrow{\mathrm{OA}})) = f(\overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ f(f(\overrightarrow{\mathrm{OB}})) = f(\overrightarrow{\mathrm{OA}}) = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \end{cases}$$

すなわち

$$S^2\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \text{ かつ } S^2\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立だから

$$S^2 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots(答)$$

問題 3-a

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

よってこの一次変換は, 原点の周りの $\frac{\pi}{3}$ の回転と，原点を中心とする 2 倍の拡大の合成となる．よって円は円に移り，その中心は

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

また半径は 2 倍となるから，求める像は

$$(x-1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 4$$

問題 3-b

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

よってこの一次変換は, 原点の周りの $\frac{\pi}{4}$ の回転と，原点を中心とする $\sqrt{2}$ 倍の拡大の合成となる．よって

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^8 = (\sqrt{2})^8\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 8\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 8\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 8\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 8\right) \end{pmatrix} = 16\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 16E$$

[第 2 節への基本チェック]

問題 a (1)$\overrightarrow{\mathrm{OP}'} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ だから,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p \\ 2+4p \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$p(1-p) = 2+4p \longleftrightarrow p^2+3p+2 = 0$$

同様にして

$$q^2+3q+2 = 0$$

ゆえに p, q はともに $x^2+3x+2=0$ の解となる．$p<q$ だから,

$$p=-2, \quad q=-1$$

(2)f の不動直線の方向ベクトルを $\overrightarrow{n}$ とすると，$f(\overrightarrow{n}) /\!/ \overrightarrow{n}$. よって (1) より,

$$m=-2,\ m=-1.$$

【注】不動直線の方向ベクトルを $\overrightarrow{n}$ とすると

$$f(\overrightarrow{n}) = k\overrightarrow{n} \qquad (\text{但し } k \fallingdotseq\!\!\!\!/\ 0)$$

問題 b

$$\triangle\mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}\left|3\times 5 - 2\times 1\right| = \frac{13}{2}$$

問題 c

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+6y \\ x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x+3y) \\ x+3y \end{pmatrix} = (x+3y) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(x, y) が平面全体を動くとき，$x + 3y$ は任意の実数値をとるので

$$\text{直線 } y = \frac{1}{2}x$$

問題 4-a

$$detA = |1 \times 4 - (-1) \times 2| = 6$$

よって A は対応する図形の面積を 6 倍にする．一方，円 C の囲む面積は π だから，C' の囲む面積は

$$6\pi$$

問題 5-a (1) 右下図
(2)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+6y \\ x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x+3y) \\ x+3y \end{pmatrix} = (x+3y) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cdots ①$$

(x, y) が $x + y = 1$ 上を動くとき，$x + 3y$ は任意の実数値をとるので

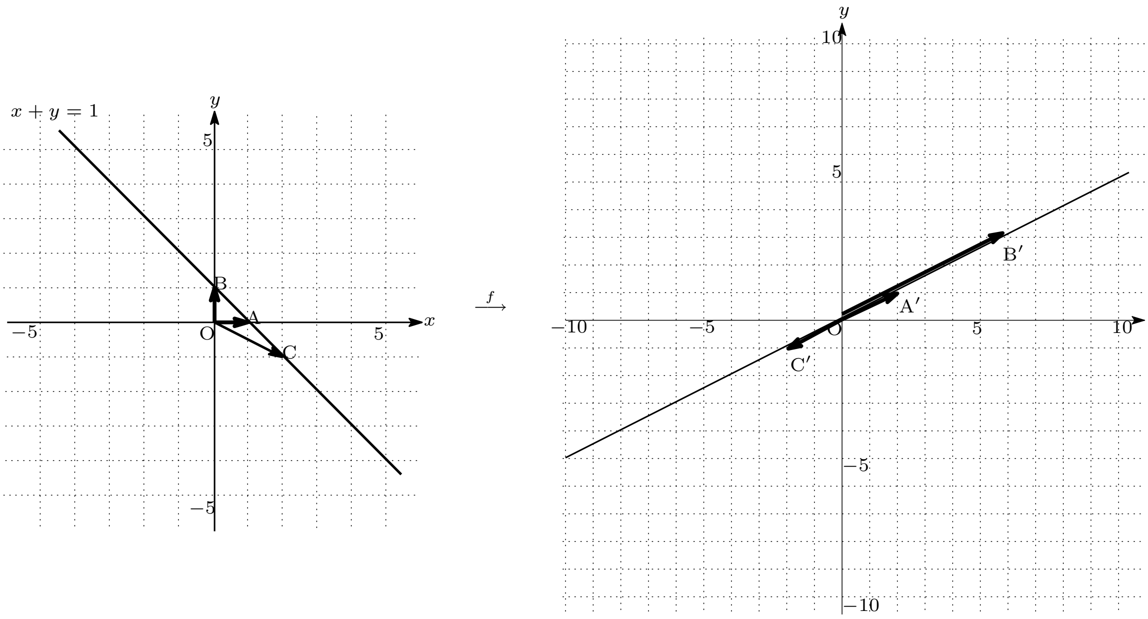
$$\text{直線 } y = \frac{1}{2}x$$

(3) (x, y) が $l_1 : x + 3y = -3$ 上を動くとき，その像は ① より

$$\text{点 } (-6, -3)$$

同様にして，l_2，l_3 の像はそれぞれ

$$\text{点 } (0, 0), \quad \text{点 } (6, 3)$$



(4) $\mathrm{P}(x, y)$ が $x^2+y^2 \leqq 1$ 内にあるとき，$x+3y$ のとりうる値の範囲を求めればよい．すなわち直線 $x+3y=k$ と 長方形が共有点を持つ範囲を求めると良い．点 $(2,1)$ を通るとき

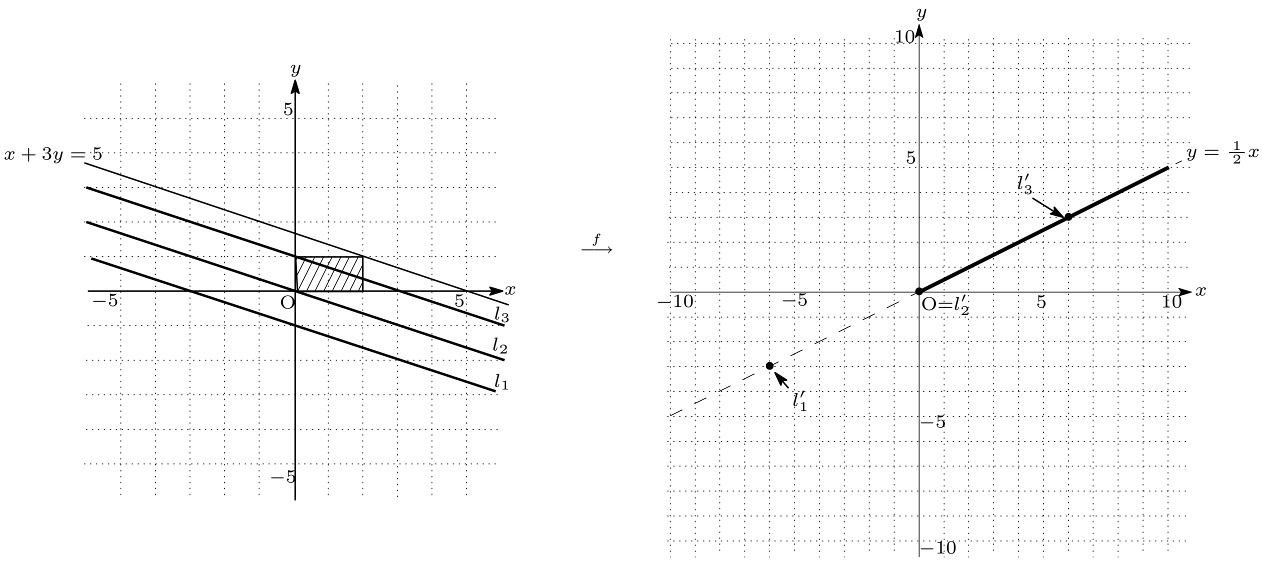
$$x+3y=2+3=5$$

原点を通るとき $x+3y=0$ だから，$(x+3y)$ のとり得る範囲は

$$0 \leqq x+3y \leqq 5$$

よって ① より，求める像は

$$\text{線分 } y=\frac{1}{2}x \ \ (0 \leqq x \leqq 10)$$



$\boxed{\textbf{問題 5-b}}$ $\mathrm{P}(x, y)$ の像を $\mathrm{P}'(x', y')$ とすると，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x+2y)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \cdots ①$$

(1) 平面全体の像は,

$$y=-\frac{1}{3}x \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)f によって，一点に移される直線は $x+2y=k$ (k は一定の実数) であるから，求める a は

$$a=-\frac{1}{2} \qquad \cdots(\text{答})$$

(3) P が D 内を動くとき，$x+2y=k$ のとりえる範囲を求めればよい．$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ と 直線 $x+2y=k \Longleftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}$ を連立して

$$-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2} \Longleftrightarrow x^2-x+k-1=0$$

(i) 接するとき，これが重解を持つから

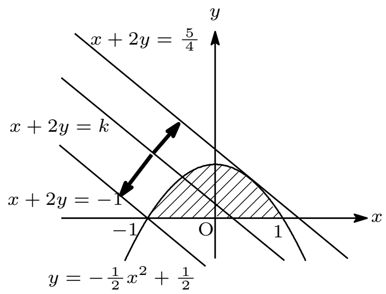
$$(\text{判別式}) = (-1)^2 - 4(k-1) = 0 \iff k = \frac{5}{4}$$

(ii) $(-1, 0)$ を $x + 2y = k$ が通るとき，

$$k = -1 + 2 \times 0 = -1$$

以上より，$x + 2y$ のとりうる値の範囲は

$$-1 \leqq x + 2y \leqq \frac{5}{4}$$



よって ① より，求める図形は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \left(-1 \leqq k \leqq \frac{5}{4} \right) \iff y' = -\frac{1}{3}\,x' \left(-3 \leqq x' \leqq \frac{15}{4} \right) \qquad \cdots (\text{答})$$

問題 6-b (1) 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} (\text{固有値 } 2) \quad \text{と} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (\text{固有値 } 5)$$

(2) 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} (\text{固有値 } 0) \quad \text{と} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} (\text{固有値} - 4)$$

問題 6-d (1)

$$y = x,\ y = -\frac{1}{2}x$$

(2)

$$y = x,\ y = -\frac{1}{2}x + n\ (n \text{ は任意})$$

問題 6-e (1)

$$y = -2x,\ y = \frac{1}{3}x$$

(2)

$$y = -2x + n\ (n \text{ は任意})$$

(3)

$$y = -x$$