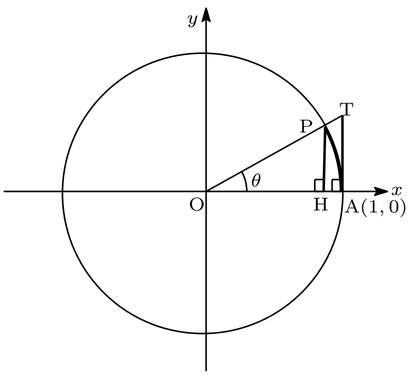
第1章　三角関数の極限と近似

三角関数の極限

$$① \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1 \qquad \cdots(\text{基本公式})$$
$$② \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\frac{1}{2} \qquad \cdots(\text{準公式})$$



【証明】単位円上に，中心角が θ (単位はラジアンで，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$) の扇形 OAP を考え, P から x 軸に下ろした垂線の足を H，A における接線と半直線 OP の交点を T とすると，

$$\overline{\mathrm{PH}} < \text{弧}\,\mathrm{AP} < \overline{\mathrm{AT}}$$

すなわち

$$\sin\theta<\theta<\tan\theta \Longleftrightarrow \sin\theta<\theta<\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

各辺を θ で割って整理すると

$$\cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<1$$

$\theta<0$ の場合も $-\theta=h$ とおいて上の関係が成り立つ．$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\cos\theta=1$ だから, ハサミウチより

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

② の方は ① を使って簡単に証明できます.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{(1+\cos\theta)}=\frac{1}{2}$$

…(証明終)

①,② は $\theta\quad 0$(非常に 0 に近い) のとき，次の近似ができることを表しています.

$$\begin{cases}\dfrac{\sin\theta}{\theta}\quad 1 \Longleftrightarrow \sin\theta\quad\theta \\ \dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}\quad\dfrac{1}{2}\Longleftrightarrow 1-\cos\theta\quad\dfrac{1}{2}\theta^2 \Longleftrightarrow \cos\theta\quad 1-\dfrac{1}{2}\theta^2\end{cases}$$

例で確かめてみましょう.

(i) $\theta = \frac{\pi}{6}$のとき

$$\begin{cases} \sin\theta = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = 0.5 \\ \theta = \frac{\pi}{6} = \frac{3.1415926\cdots}{6} = 0.523598\cdots \\ \frac{\sin\theta}{\theta} \quad \frac{0.5}{0.52359} \quad 0.95493 \end{cases} \quad \begin{cases} 1-\cos\theta = 1-\cos\frac{\pi}{6} = 1-\frac{\sqrt{3}}{2} = 1-0.866025\cdots = 0.133974\cdots \\ \theta^2 = \left(\frac{3.1415926\cdots}{6}\right)^2 = (0.523598\cdots)^2 = 0.27415486\cdots \\ \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} \quad \frac{0.133974}{0.27415486} \quad 0.4886821 \end{cases}$$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ でもかなり近いですが，θ がもっと小さいとさらに近くなります.

(ii)$\theta = \frac{\pi}{12}$のとき

$$\begin{cases} \sin\theta = \sin\frac{\pi}{12} = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = 0.258819\cdots \\ \theta = \frac{\pi}{12} = \frac{3.1415926\cdots}{12} = 0.261799\cdots \\ \frac{\sin\theta}{\theta} \quad \frac{0.258819}{0.261799} \quad 0.988615 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-\cos\theta = 1-\cos\frac{\pi}{12} = 1-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{1.7320508\cdots}{2} = 0.0340741\cdots \\ \theta^2 = \left(\frac{3.1415926\cdots}{12}\right)^2 = (0.261799\cdots)^2 = 0.0685387\cdots \\ \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} \quad \frac{0.0340741}{0.0685387} \quad 0.497152 \end{cases}$$

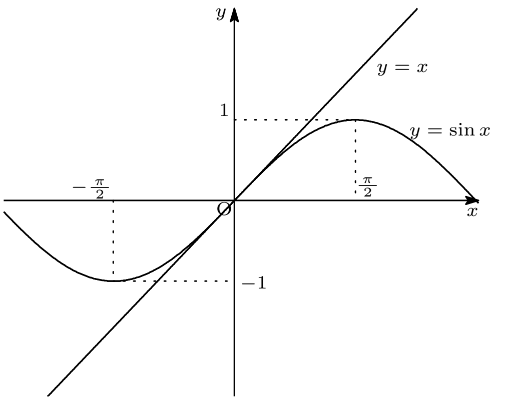
以上から次のことが分かります.

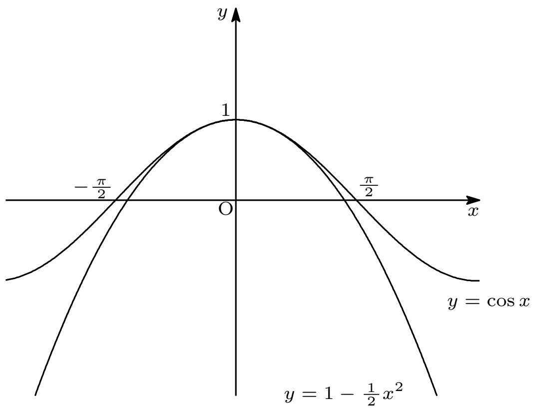
三角関数と近似

θ が非常に小さいとき

$$① \ \sin\theta \quad \theta$$

$$② \cos\theta \quad 1-\frac{1}{2}\theta^2$$





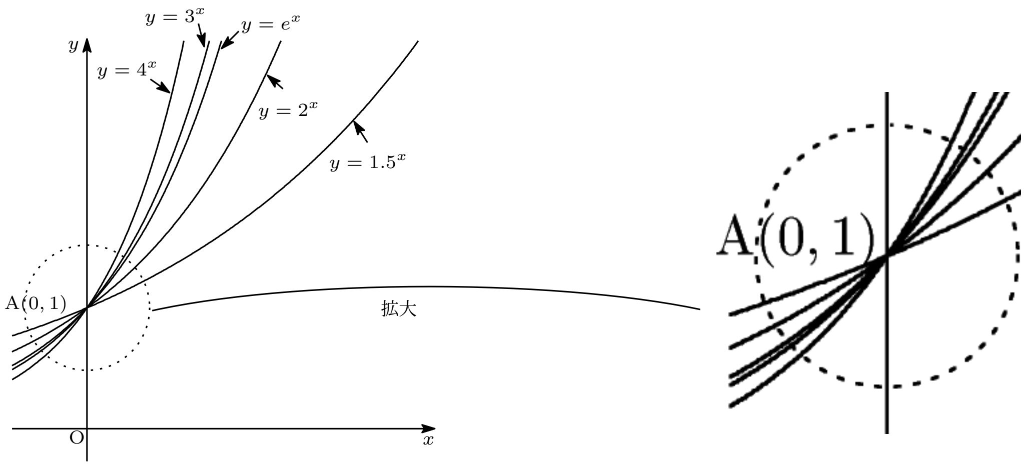
実際 $y = \sin x$, $y = x$ のグラフは原点において接し，$y = \cos x$ と $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ のグラフも非常に「くっついている」ことが分かる．また **$y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ は，$y = \cos x$ の 接線ではない． しかし，実は点 $(0, 1)$ の近くでは もっと $y = \cos x$ を近似した関数になっている．** このような放物線による近似を 「2 次近似」 と言う．(一方 接線による近似は「1 次近似」という.)

練習 1　次の極限を求めよ．ただし答えのみでよい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2\sin 3x)}{x}$

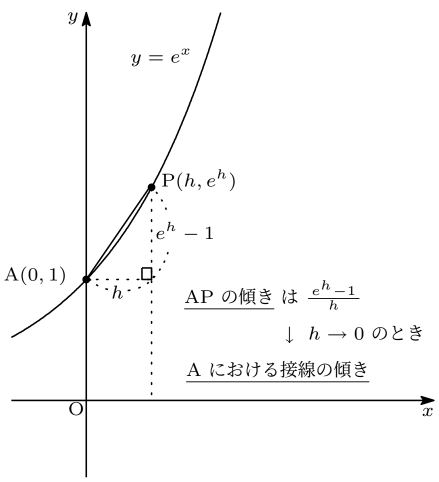
(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x^2}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x^2}$

第2章　指数·対数関数の極限と近似



指数関数 $y=a^x$ は全て点 A$(0,1)$ を通るが，この点 A における $y=a^x$ の接線の傾きは a の値が増加するにつれて，増加する．ここで **A(0,1) における接線の傾きが 1 になるような a の値を e と定義する．**[注1)] $f(x)=e^x$ のとき，$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$ だから，

$$\text{「}y=e^x\text{の }A(0,1)\text{ における接線の傾きが }1\text{」}\Longleftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1\ (e\text{ の定義})$$



このように定義すると

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}\cdot e^x=e^x$$

ゆえに

$$(e^x)'=e^x$$

となって「微分しても変わらない」ので，とても便利．
また，一般の指数関数で $g(x)=a^x$ のときは

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}\cdot a^x$$

となる．例えば

$$(3^x)'=3^x\times\lim_{h\to 0}\frac{3^h-1}{h},\quad (4^x)'=4^x\times\lim_{h\to 0}\frac{4^h-1}{h}$$

ここで対数の定義から $a=e^{\log_e a}=e^{\log a}$ を用いると

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{h\log_e a}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{h\log_e a}-1}{h\log_e a}\cdot\log_e a=\log_e a$$

$$\therefore (a^x)'=a^x\cdot\log a.$$

[注1)] $e=2.71828182845\cdots$. e の定義にはいろいろあるが，ここではグラフによる定義を採用する．他の定義は付録を参照．

e の定義に関してはいろいろの仕方があります．例えば次の 4 つの定義は全て同値です．[注2)]

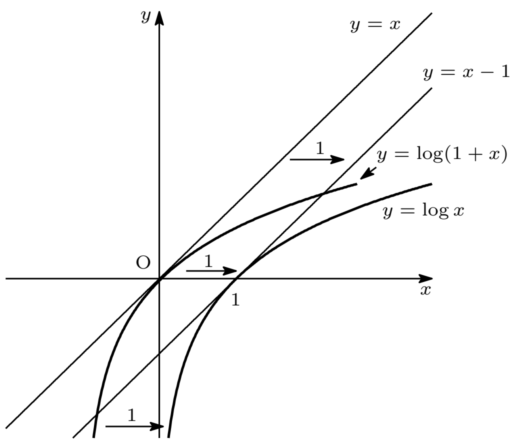
指数 · 対数の極限

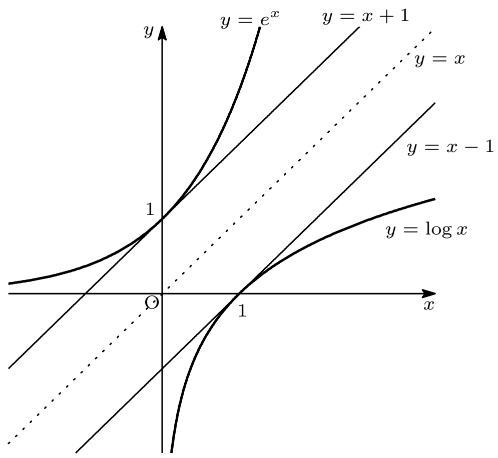
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \ \underset{\log(1+t)=x}{\overset{e^x-1=t}{\longleftrightarrow}}\ \lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=1 \longleftrightarrow \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e \longleftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

さて左から 1 番目と 2 番目の式から，x　0 のとき

$$\frac{e^x-1}{x} \quad 1 \iff e^x \quad 1+x. \qquad \frac{\log(1+x)}{x} \quad 1 \iff \log(1+x) \quad x$$

これは「$y=1+x$, $y=x$ がそれぞれ $y=e^x$, $y=\log(1+x)$ の $(0,1),(0,0)$ における接線になること」を表しています．また $y=\log(1+x)$, $y=x$ を「x 軸方向に 1 平行移動」すると，それぞれ $y=\log x$, $y=x-1$ となるので，$y=x-1$ が $y=\log x$ の $(1,0)$ における接線になることが分かります．すると $y=e^x$ と $y=\log x$ のグラフは互いに $y=x$ に関して対称ですから，図形的にも 2 つの極限の式が同値なのが納得できます.





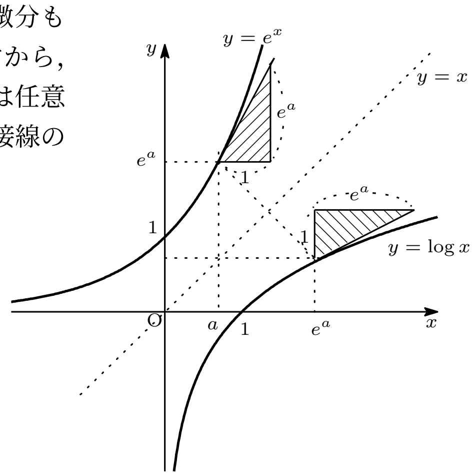
[注2)] 左から 2 番目と 3 番目の式が同値なのは，次のようにして分かります．また 3 番目の式で $x=\frac{1}{t}$ と置くと 4 番目の式が得られます.

$$\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=1 \iff \lim_{t\to 0}\log(1+t)^{\frac{1}{t}}=1=\log e \iff \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$$

私事ですが, 私は高校で, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ を e の定義として習いました．この式を定義とすると「A における接線の傾きが 1 になるような指数関数がある」という「当たり前な事」も，直感に頼らずに証明できます．(「付録」参照)

また $y = e^x$ と $y = \log x$ のグラフの対称性から，$\log x$ の微分も簡単です．右図で二つの三角形は $y = x$ に関して対称ですから，$y = \log x$ の $x = e^a$ における接線の傾きは $\frac{1}{e^a}$. ところが a は任意の実数ですから，結局 $x = X(X > 0)$ における $y = \log x$ の接線の傾きは $\frac{1}{X}$ となります．すなわち

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \ (x > 0)$$



練習 2-1 次の極限を求めよ．ただし 答えのみでよい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + 3x)}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{5^x - 1}{x}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x \sin x} - 1}{x \log(1 + x)}$　　(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}$

2.1　ちょっといい e の話 (瞬間複利法)

ここでは e の古典的な定義; $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ を直感的に理解してみましょう．(厳密な説明は「付録」にあります.)　$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n = 1, 2, 3, \cdots)$ とします．例えば

$$a_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2, \qquad a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25,$$

$$a_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2.37037037, \qquad a_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} = 2.44140625,$$

このように n が増加すると a_n も増加します．これを直感的に理解してみましょう．

ある銀行に一万円預けて放っておくと，一年間で 2 倍になるとします．(一年複利で利率 100%) これをもっと増やすことは出来ないでしょうか？もし**銀行の利率が 預ける期間と関係ないならば可能です．**[注3)] 仮に 半年後に下ろして利子も含めて預け入れるとしたら どうなるでしょうか? 半年後には 1 万 5 千円もらえます．それをさらに半年預けるとさらにその 1.5 倍ですから 一年後には

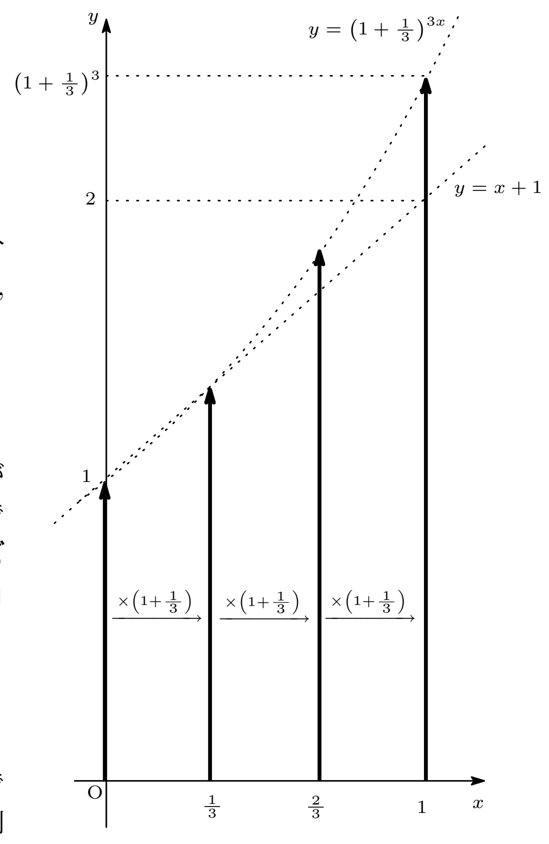
$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\text{万円} \times \left(1+\frac{1}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \text{万円}$$

となります．さっきより儲かります．この預金法を「半年複利」と言います．今度は 4ヵ月後に下ろして 利子も含めて預け，さらに 4ヵ月後にも同じことをすると 一年後にはどうなるでしょうか？

$$4\text{ヵ月後}：1\text{万円} \times \left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\text{万円}.$$

$$8\text{ヵ月後}：\frac{4}{3}\text{万円} \times \left(1+\frac{1}{3}\right) = \left(1+\frac{1}{3}\right)^2\text{万円}.$$

$$1\text{年後}：\left(1+\frac{1}{3}\right)^2\text{万円} \times \left(1+\frac{1}{3}\right) = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3\text{万円}.$$



「半年複利」より「4ヶ月複利」の方がさらに儲かることが分かりました．結局 一万円を預け入れ「 $\frac{1}{n}$ 年毎に引き出し，利子も一緒に預け入れる 」を繰り返すと，一年後には

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{万円} = a_n \text{万円}$$

となります．これが a_n の直感的な意味です．すると a_n が n の増加関数となるのは「当たり前」です．そして，これで n をどんどん大きくしていき,「**1 秒，0.1 秒, 0.01 秒** $\cdots$ **ごとに複利で受けとり, 預け入れるようにする (瞬間複利法)**」なら 一万円を預けたときに, 一年後に受け取る金額は

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\ (\text{万円})$$

となります．これが e の直感的な意味です．e　2.71828 ですから ほぼ 2 万 7 千円も貰えることになります．一年複利で増やした場合の 2 万円よりはずーと大きくなります．

注3) 「利率が 預ける期間と関係ない」というのは，1 年間で 2 倍になる (一万円の利子が付く) としたら，半年では 1 万 5 千円 (5 千円の利子がつく),3ヶ月では 1 万 2500 円 (2500 円の利子がつく) になる と言うことです．ただし 実際の銀行では 利率は預け入れる期間によって変わります.

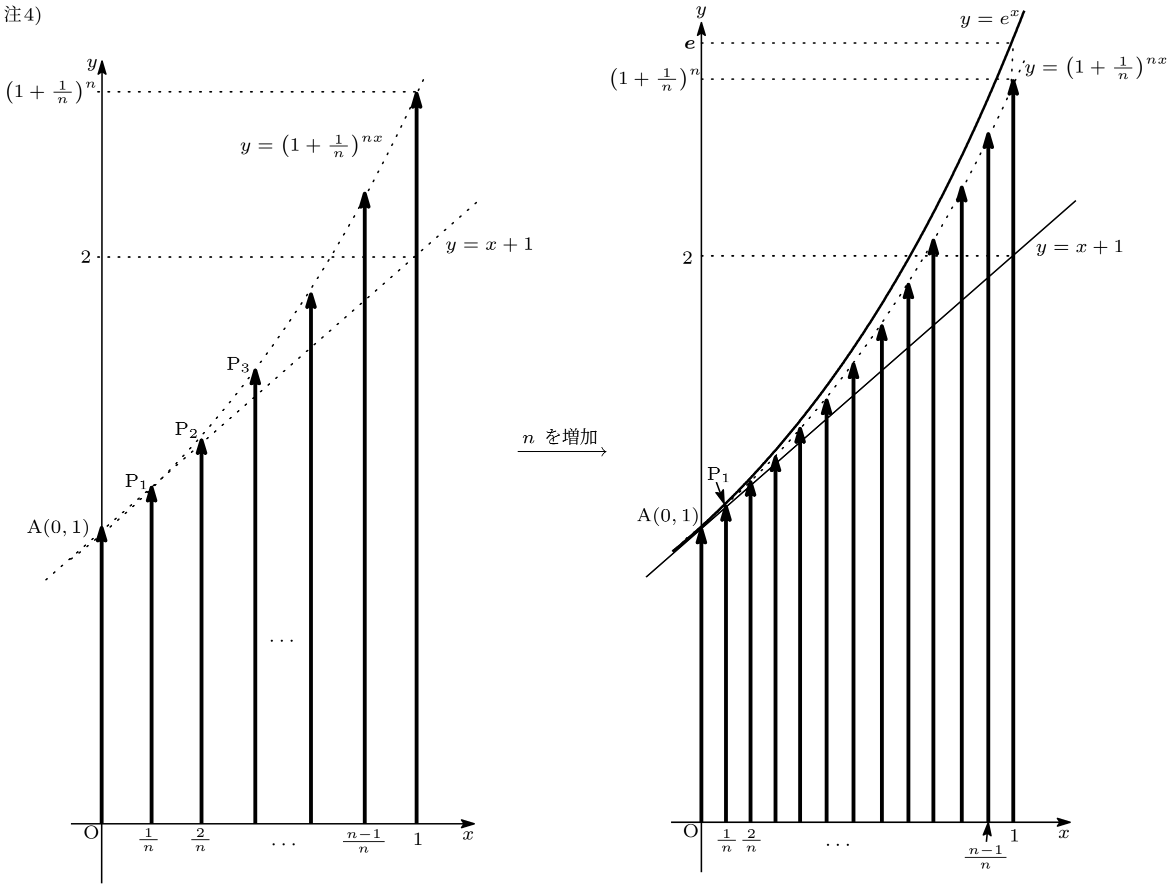
次に

$$\mathrm{P}_1\left(\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right), \mathrm{P}_2\left(\frac{2}{n}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right), \mathrm{P}_3\left(\frac{3}{n}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^3\right), \cdots, \mathrm{P}_k\left(\frac{k}{n}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^k\right), \cdots,$$

と置くと P_k $(k=1,2,3,\cdots)$ は全て $y=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^x$ 上にあります．ここで $f_n(x)=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^x$ とおいて, x を一定にして n を限りなく大きくすると

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^x=e^x \qquad \cdots(*)$$

これは **$n\to\infty$ のとき $y=f_n(x)$ のグラフは $y=e^x$ のグラフに限りなく近づく事** を表しています.[注4)]



練習 2-2 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ を利用して次の極限を求めよ.[注5)]

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} \qquad (3)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}$$

[注4)] $\mathrm{P}_1(\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n})$ ですから，A$(0,1)$ とすると **直線 AP$_1$ の傾きは常に 1 です．**（点 P$_1$ は直線 $y=x+1$ 上にあります.）そして $n\to\infty$ のとき点 P$_1$ は限りなく $y=e^x$ 上の点 Q$(\frac{1}{n}, e^{\frac{1}{n}})$ に近づきます．さらに 点 Q は A に限りなく近づくので, **$y=x+1$ が 点 A において$y=e^x$ と接すること** もわかります.

[注5)] (1),(2) は，一万円を 年利 100%の銀行で，瞬間複利で預けたとすると $\frac{1}{2}$ 年後と 2 年後には 何万円貰えるかということです．また (3) は 年利が 200% のときの金額を表します.

第3章　主要部分に注目する

極限でもっとも大切なことは **主要部分に注目すること**. 即ち**近似して考えること**です. 答は見ただけで求まり, 後で 真偽を確認する事も多い.

練習 3

次の極限を求めよ. ただし, 答えのみでよい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+4}{3x^2-3x+1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3+2x^2+x}{2x^3+3x^2-3x}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+2^n+1}{3^n-2^n}$

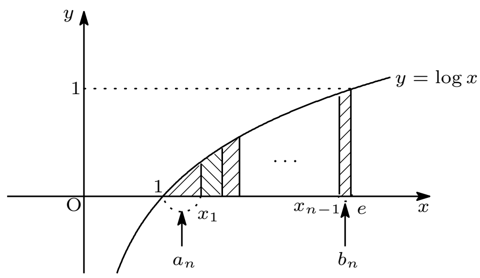
(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+2^n}$

(7)$y=\log x$ と直線 $x=e$, x 軸で囲まれた領域を, y 軸に平行な直線 $x=x_1, x=x_2, \cdots, x=x_{n-1}$
$(1<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<e)$ によって分割し 面積を n 等分する. $a_n=x_1-1$, $b_n=e-x_{n-1}$ とするとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{{a_n}^2}$$

の値を求めよ.



第4章　(参考) ロピタルの定理

ロピタルの定理 (簡単な場合)

$f(x)$, $g(x)$ が $x=a$ を含むある区間で微分可能で $f(a)=g(a)=0$, また $x=a$ 以外では $g'(x)\fallingdotseq 0$ とする．このとき $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$g'(a)\fallingdotseq 0$ のときは非常に簡単に「厳密に」証明できる．

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

【注】 **$\frac{0}{0}$ の不定形になっていること を確認してから使ってください．** 注1)

例: ロピタルの定理

次の極限を 求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\log x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to x^3}\frac{x-\sin x}{x^3}$

(1) $f(x)=\sqrt{x}-1$, $g(x)=\log x$ とおくと「$f(1)=g(1)=0$」．また $g'(x)=\frac{1}{x}$ ですから,「$g'(1)\fallingdotseq 0$」．よって厳密に証明しながら使えるタイプです.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\log x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\frac{g(x)-g(1)}{x-1}}=\frac{f'(1)}{g'(1)}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$$

☜ $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $g'(x)=\frac{1}{x}$

(2) 今度は $f(x)=1-\cos x$, $g(x)=x^2$ とおくと $f(0)=g(0)=0$ ですが $g'(x)=2x$ ですから $g'(0)=0$. よって先のように簡単には行きません．しかし $g'(x)=0$ となるのは $x=0$ のときだけなので, ロピタルの定理が使えます.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}$$

☜ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

(3) 先ほどと同様に $f(x)=\sin x-x^3$, $g(x)=x^3$ とおくと $f(0)=g(0)=0$ で，$g'(x)=3x^2$ ですから $g'(x)=0$ となるのは $x=0$ のときだけです．よってロピタルの定理が使えます.

$$\lim_{x\to x^3}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

注1) さもないと $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(x)'}{(x-1)'}=1$ などの結果になってしまう.（もちろん正解は 「0」 ）

【例による ロピタルの定理の説明】

ロピタルの定理を使うと不定形の極限が簡単に求まるわけですが，そうであるがゆえに，これを証明抜きに使うと大幅減点 (または 0 点) となるでしょう．そこで

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

を例にとり証明をつけてみましょう．XY 平面上の点 $\mathrm{P}(t^2, 1-\cos t)$ をとり，t が $t=0$ を含むある区間で動くとき P の描く曲線を C とします．$x \fallingdotseq 0$ のとき，$\mathrm{A}(x^2, 1-\cos x)$ とすると, A は原点と異なるので

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = (\text{直線 OA の傾き})$$

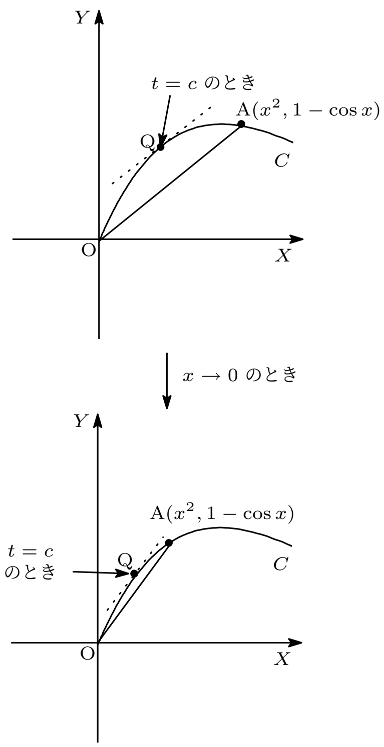
このとき**曲線 C 上で O から A までの間の点 Q で，Q における C の接線が 直線 OA と平行になるものが存在します．** (図参照) この点 Q のパラメータを $t=c$ $(0<c<x$ または $x<c<0)$ とすると, Q における C の接線の傾きは $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ だから

$$(\text{直線 OA の傾き})\ \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\ (0<c<x \text{ または } x<c<0)$$

となる c が x と 0 の間に存在します．(一般化された平均値の定理) ここで $x\to 0$ とすると $c\to 0$．しかし $\lim_{c\to 0}\frac{f'(c)}{g'(c)}$ は存在するので

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{c\to 0}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c\to 0}\frac{\sin c}{2c} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2t} = \frac{1}{2}$$

注2)



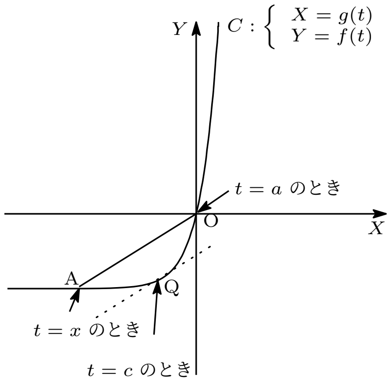
注2) 上の証明から分かるように「$t=0$ 以外では $g'(t)=0$」という条件は C の接線の傾き：$\frac{f'(c)}{g'(c)}$ が存在するための条件です．しかし「$t=0$ を含む小さい区間で常に $g'(t)=0$」となることは余り無いことですから 気にしなくて良いでしょう．

【ロピタルの定理の図形的証明】 – 図形的な証明ならば，一般の場合でも 比較的簡単です．[注3)] –

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

を考えます．$t=a$ を含むある区間について C :$(g(t), f(t))$ を定義します．$\mathrm{A}(g(x), f(x))$ とすると「$x \fallingdotseq a$ のとき $g'(x) \fallingdotseq 0$」 だから 「$x=a$ を含むある区間で $x=a$ 以外では $g(x) \fallingdotseq 0$」．さらに $(g(a), f(a)) = (0, 0)$ だから，

$$\frac{f(x)}{g(x)} = (\text{直線 OA の傾き})$$



図より**曲線 C 上で O から A までの間の点 Q で，Q における C の接線が 直線 OA と平行になる点が存在する．**この点 Q のパラメータを $t=c$ $(0<c<x$ または $x<c<0)$ とすると，Q における C の接線の傾きは $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ だから

$$(\text{直線 OA の傾き})\quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\ (1<c<x \text{ または } x<c<1)$$

となる c が存在する．x が a に限りなく近づくとき，c も a に限りなく近づく．そして $\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}$ は存在するので

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \text{Q.E.D.}$$

練習 4 次の極限を求めよ．(必要があればロピタルの定理を使っても良い.)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+x)}{x^2}$　　　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$

[注3)] 入試では このぐらい直感的な説明で大丈夫でしょう．

[練習 4] 解答

ロピタルの定理より，

(1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\{e^x-(1+x)\}'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{2} \qquad \cdots(*)$$

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{\{e^x+e^{-x}-2\}'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\{e^x-e^{-x}\}'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1\end{aligned}$$

【別解】

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+1-2e^x}{x^2\cdot e^x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{e^x}=1$$

Comment

(1) $(*)$ より，$x \quad 0$ のとき，

$$\frac{e^x-(1+x)}{x^2} \quad \frac{1}{2}$$

よって

$$\boldsymbol{e^x \quad 1+x+\frac{1}{2}x^2}$$

これを e^x の $x \quad 0$ における **2 次近似式**という．(後述)

(2)「$\boldsymbol{e^x \quad 1+x}$」と近似すると $e^{-x} \quad 1+(-x)$ ですから，$x \quad 0$ のとき

$$\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\frac{(1+x)+(1-x)-2}{x^2}=\frac{0}{x^2}=0 \qquad (誤り)$$

となってしまいます．この場合は**分母が $\boldsymbol{x^2}$ ですから 同程度の微小量まで考えないとうまく行きません．すなわち 2 次近似式を使います．**「$\boldsymbol{e^x \quad 1+x+\frac{x^2}{2}}$」ですから $x \quad 0$ のとき

$$\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2} \quad \frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)+\left(1-x+\frac{(-x)^2}{2}\right)-2}{x^2}=\frac{x^2}{x^2}=1 \qquad \text{(O.K.)}$$

このように $\frac{0}{0}$ の不定形で, 分母が x^2 と同程度の微小量ならば，分子も x^2 と同程度の微小量まで考えないとうまく求まりません．分母が x^3 ならば, 分子も x^3 の項まで考えるべきです．実際の計算ではむしろ「ロピタルの定理」を使ったほうが速くなるでしょう．しかし「近似」の考え方には「直感的でイメージをつかみやすい」というメリットがあります．ただ, これを使って $\frac{0}{0}$ の不定形を求めるには**「分母と分子を同程度の微小量まで近似すること」**が必要です．そうすれば正解が得られます．(コンピュータソフトの *MuPAD* は，このような近似式を使って極限を求めています.)

第5章　近似公式 (Taylor 展開)

$x = a$ の近くでの 近似式

$f^{(n)}(a)$ が存在するとき $x = a$ の近くでの n 次近似式は

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

特に $n = 1, 2, 3$ のとき

[1 次近似式] $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

[2 次近似式] $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$

[3 次近似式] $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dfrac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$

注1)

特に $a = 0$ のときは, 次のようになります.

$x = 0$ の近くでの 近似式

$f^{(n)}(0)$ が存在するとき $x = 0$ の近くでの n 次近似式は

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

特に $n = 1, 2, 3$ のとき

[1 次近似式] $f(x) = f(0) + f'(0)x$

[2 次近似式] $f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2$

[3 次近似式] $f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f'''(0)}{3!}x^3$

注1) $f^{(n)}(a)$ は n 回微分を表します．例えば $f^{(1)}(a) = f'(a)$, $f^{(2)}(a) = f''(a)$, $f^{(3)}(a) = f'''(a)$．　また 誤差は $(x-a)^n$ より高位の微小量となります.

5.1　1 次近似式

$f(x)$ が $x=a$ で微分可能のとき,

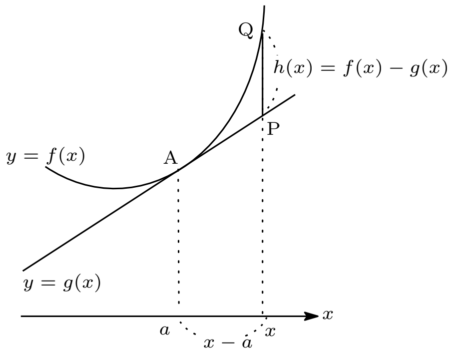
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

これは次のように書き直すことができます.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a}=0$$

よって $g(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$　**(これは $x=a$ における接線の式と同じ!)** とすると

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{x-a}=0$$



これは $f(x)$ を $g(x)$ で近似したときの**誤差 $h(x)$ が $x\to a$ のとき，$(x-a)$ に比べて 速く小さくなる**ことを表します.　この意味で $x=a$ における接線 $y=g(x)$ は $y=f(x)$ の近似になっています．即ち,

1 次近似式

$f(x)$ の $x=a$ の近くでの 1 次近似式は，$x=a$ における接線で

$$f(x) \qquad f(a)+(x-a)f'(a)$$

このとき，$f(x)$ と近似式との誤差 $h(x)=f(x)-\{f(a)+(x-a)f'(a)\}$ は $x-a$ より速く小さくなる (高位の微小量である).

注2)

注2)「$x\to a$」のとき，α,β がともに 0 に近づくとする．さらに このとき

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha}=0$$

ならば,「β が α より高位の微小量である」といいます．(β は α に比べると無視できるぐらい小さい). そして

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha}=k \ (k \text{ は有限な値})$$

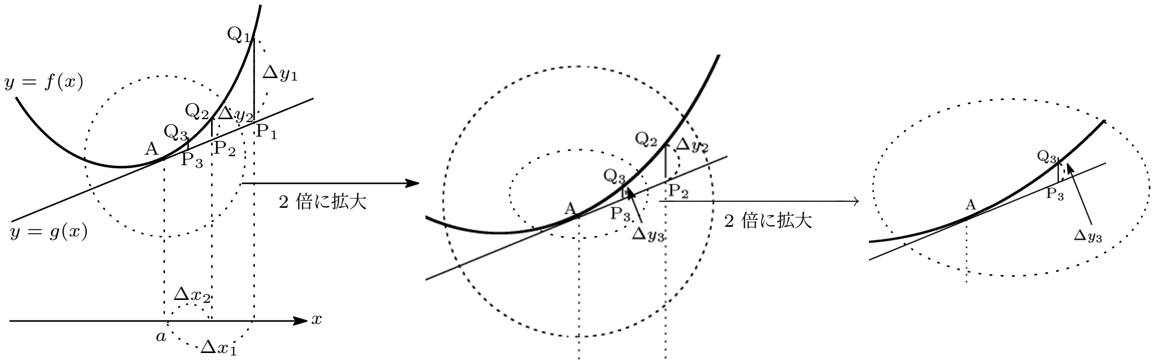
ならば 「β は α と同位の微小量である」といいます.

ここで **「誤差が $(x-a)$ よりも高位の微小量となること」** の図形的意味を考えてみましょう．いま，体のサイズが半分，$\frac{1}{4}$ と順に小さくなって，それにつれて見える距離も小さくなっていくとします．(例えば 10m の範囲が見える人は，半分になると 5m, さらに半分になると 2.5m しか見えなくなるものとする.) このとき どのようにグラフの見え方が変わるだろうか？(この頁の図では $\Delta x_2 = \frac{1}{2}\Delta x_1$, $\Delta x_3 = \frac{1}{2}\Delta x_2$. またそれぞれに対応した $h(x)$ の値を $\Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3$ とした．)

(i) $f(x)$ が $x=a$ において微分可能のとき, $x-a$ が半分になると $h(x)=f(x)-g(x)$ は半分よりも小さくなる．よって

$$\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} < \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$$

したがって体の大きさが半分になったとき，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフはより「くっついて見える.」さらにサイズを半分にするともっと 「グラフはくっついて見える.」



体の大きさが一倍のとき見える曲線　体の大きさが半分になった時に見える曲線　体の大きさが $\frac{1}{4}$ になった時に見える曲線

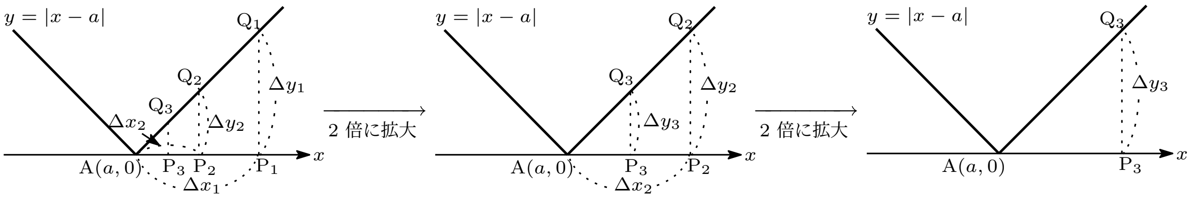
(ii) 今度は $f(x)$ が $x=a$ において微分可能でないときを考える. 例として $f(x)=|x-a|$ とする．ちょっと見ると $y=|x-a|$ の $\mathrm{A}(a,0)$ における接線は $x=0$ のような気がするが，それは間違いである．

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=1, \qquad \lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-1.$$

すなわち $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が存在しないので $f(x)=|x-a|$ は $x=a$ で微分可能でない．このとき $y=|x-a|$ のグラフと $y=0$ を $x=a$ の近くで拡大してみると

$$\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$$

ゆえに 「拡大して見ても同じ」に見える．これが「$y=0$ は接線でない」ことの図形的意味である．



体の大きさが一倍のとき見える曲線　体の大きさが半分になった時に見える曲線　体の大きさが $\frac{1}{4}$ になった時に見える曲線

すなわち 「$y=f'(a)(x-a)+f(a)$ が $x=a$ における $y=f(x)$ の接線になるということ」は，図形的には **「拡大すればするほど二つのグラフがくっついて見えるということ」** になる.

5.2　$x = 0$ の周りの近似式の例

$x = 0$ の近くでの 近似式

$f^{(n)}(0)$ が存在するとき $x = 0$ の近くでの n 次近似式は

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

5.2.1　e^x の $x = 0$ の近くでの近似

$f(x) = e^x$ とおくと

$$f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, f'''(x) = e^x$$

ゆえに

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$$

したがって

$$\boldsymbol{e^x \quad 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3}$$

【証明】$x = 0$ のとき $y = f(x)$ の接線 (1 次近似式) は

$$y = 1 + x$$

$f(x)$ から 1 次近似式を引いて，x^2 との比 A をとって求めると良い.

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\{e^x - (1+x)\}'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2} \qquad ☜ \cdots \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

よって $x = 0$ の近くでは

$$\frac{e^x - (1+x)}{x^2} \quad \frac{1}{2} \longleftrightarrow \boldsymbol{e^x \quad 1 + x + \frac{1}{2}x^2} \qquad \cdots [2 \text{ 次近似式}]$$

$f(x)$ から 2 次近似式を引いて，x^3 との比 B をとって求めます.

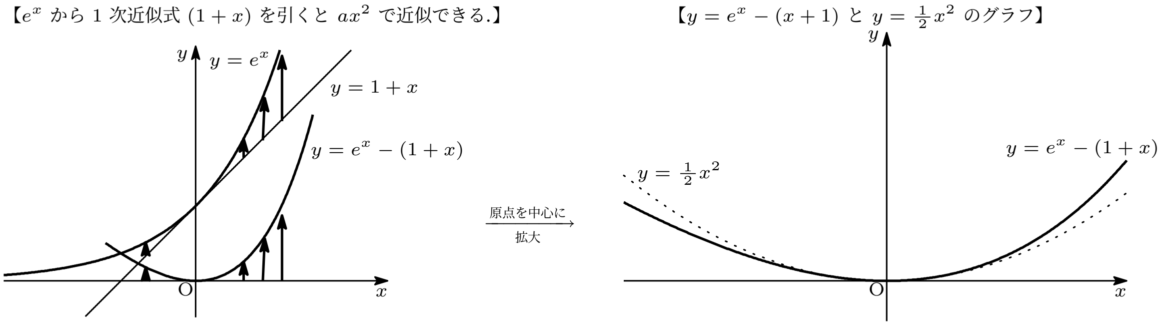
$$\begin{aligned} B &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\left\{e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\right\}'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - (1+x)}{3x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\{e^x - (1+x)\}'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{6x} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

ゆえに $x = 0$ の近くでは

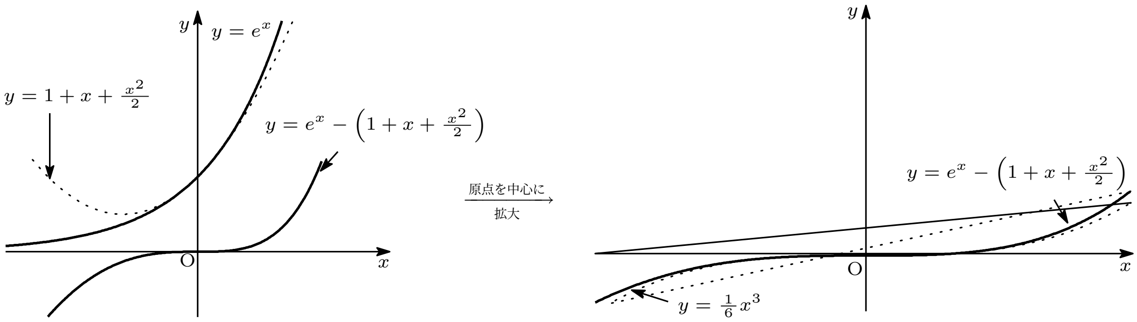
$$\frac{e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)}{x^3} \quad \frac{1}{6} \longleftrightarrow \boldsymbol{e^x \quad 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}} \qquad \cdots [3 \text{ 次近似式}]$$

x　0 のときx^2 に比べて 1 次近似式$(ax+b)$ は非常に大きいのでそれを除いてから極限をとらないと $\pm\infty$ に発散します．取り除いた残りは x^2 と同じか, より小さい無限小になります．

【e^x から 1 次近似式 $(1+x)$ を引くと ax^2 で近似できる.】　【$y = e^x - (x+1)$ と $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ】



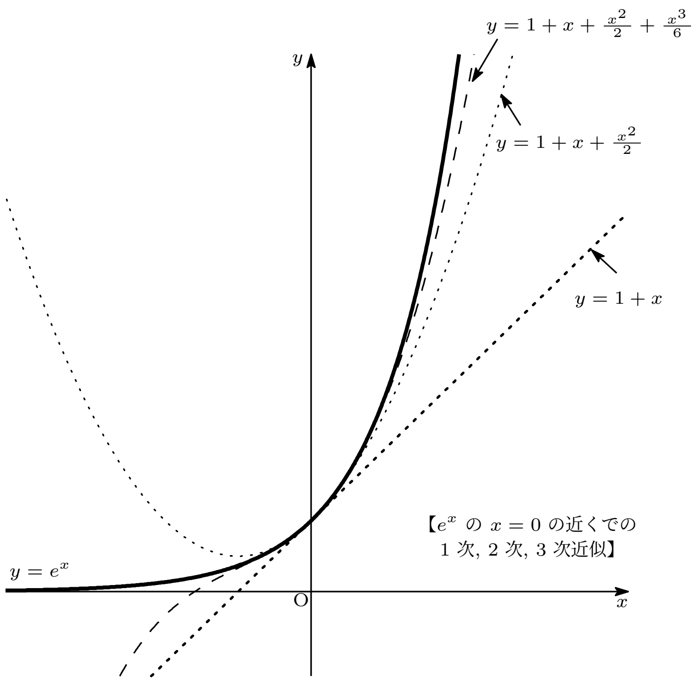
同様に x　0 **のときx^3 に比べて 2 次近似式(ax^2+bx+c) は非常に大きいので，これを除いてから x^3 との比をとらないと，$\pm\infty$ に発散してしまいます．取り除いた残りは x^3 と同じか, より小さい無限小になります．**



【e^x から 2 次近似式： $1 + x + \frac{x^2}{2}$ を引くと ax^3 で近似できる.】

【$y = e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$ のグラフと $y = \frac{1}{6}x^3$ のグラフ】

$y = e^x$ の 1〜3 次近似式を まとめて描きました．x　0 に於いて，1 次,2 次,3 次と近似が良くなります.



【e^x の $x = 0$ の近くでの 1 次, 2 次, 3 次近似】

5.2.2　$\sin x$ の $x = 0$ の近くでの近似

$f(x) = \sin x$ とおくと

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x$$

ゆえに

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1$$

したがって

$$\sin x \quad 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 \longleftrightarrow \boldsymbol{\sin x} \quad \boldsymbol{x - \frac{x^3}{6}}$$

【証明】$x = 0$ のとき $y = f(x)$ の接線 (1 次近似式) は

$$y = x$$

$f(x)$ から x を引いて，x^2 との比 A を求めると，

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x - x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2} = 0$$

したがって 2 次近似は 1 次近似と同じ式で,

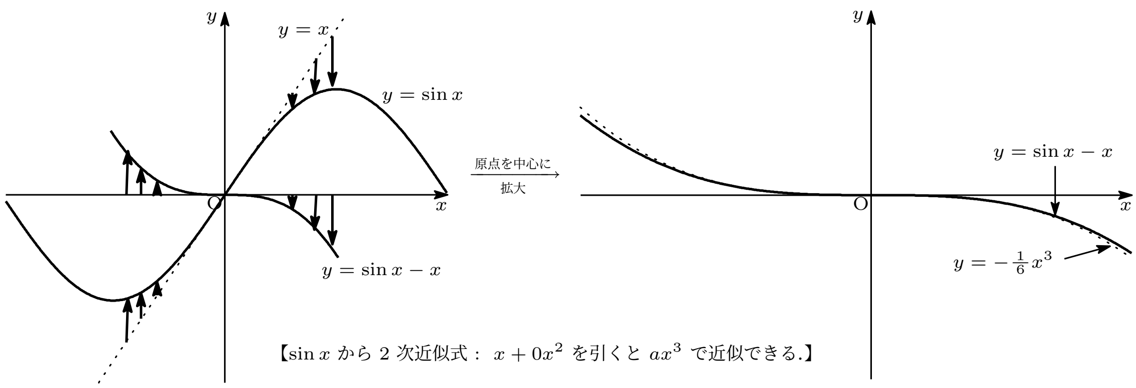
$$\sin x \quad x + 0x^2 = x$$

$f(x)$ から 2 次近似式 $x + 0x^2$ を引いて，x^3 との比 B を求めると,

$$B = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x - x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}$$

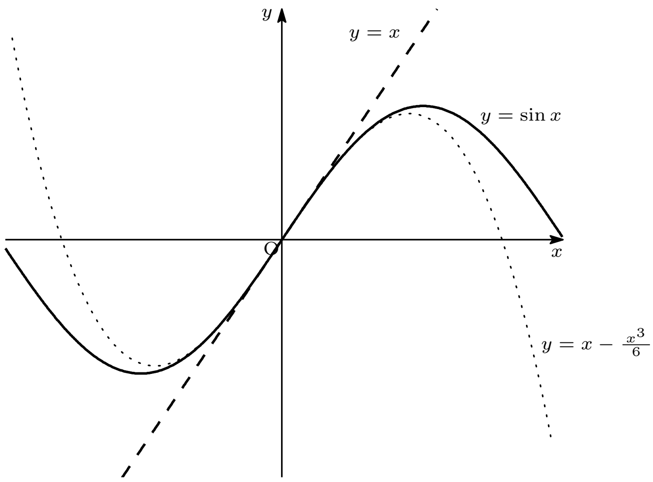
よって

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \quad -\frac{1}{6} \longleftrightarrow \boldsymbol{\sin x} \quad \boldsymbol{x - \frac{1}{6}x^3} \qquad \cdots [3 \text{ 次近似式}]$$



【$\sin x$ から 2 次近似式： $x + 0x^2$ を引くと ax^3 で近似できる.】

$y = \sin x$ の 1,3 次近似式を まとめて描きました．下図のように，$y = x - \frac{x^3}{6}$ は 原点の近くでは $y = \sin x$ に $y = x$ よりも「くっついています」．



【$\sin x$ の $x = 0$ の近くでの 1 次,2 次,3 次近似】

5.2.3　$\cos x$ の $x = 0$ の近くでの近似

$f(x) = \cos x$ とおくと

$$f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f'''(x) = \sin x$$

ゆえに

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 0$$

したがって

$$\cos x \qquad 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 \longleftrightarrow \boldsymbol{\cos x \qquad 1 - \frac{x^2}{2}}$$

【証明】$x = 0$ のとき $y = f(x)$ の接線 (1 次近似式) は

$$y = 1$$

$f(x)$ から 1 を引いて，x^2 との比 A を求めると，

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

したがって，

$$\cos x \qquad 1 - \frac{1}{2}x^2 \qquad\qquad \cdots [2 \text{ 次近似式}]$$

5.3 n 次の近似式の証明

5.3.1 2 次の近似式の証明

$$A=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-\{f(a)+f'(a)(x-a)\}}{(x-a)^2}$$

において分子を $F(x)$, 分母を $G(x)$ とおくと, $F(a)=G(a)=0$ です. よって $f''(a)$ が存在するとき

$$\begin{aligned}A=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-\{f(a)+f'(a)(x-a)\}}{(x-a)^2}&=\lim_{x\to a}\frac{(f(x)-\{f(a)+f'(a)(x-a)\})'}{((x-a)^2)'}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)}\\&=\frac{f''(a)}{2} &&☜ f''(a)=\lim_{x\to a}\tfrac{f'(x)-f'(a)}{x-a}\end{aligned}$$

よって $x=0$ の近くでの $f(x)$ の 2 次近似式は

$$f(x)\quad f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

2 次近似式 – 定理

$f''(a)$ が存在するとき, $x=a$ の近くでの $f(x)$ の 2 次近似式は

$$f(x)\quad f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

誤差は $(x-a)^2$ より高位の微小量となる.

5.3.2 3 次の近似公式の証明

$f'''(a)$ が存在する時,

$$\begin{aligned}B&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-\left\{f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2\right\}}{(x-a)^3} &&☜ これは \tfrac{0}{0} の不定形\\&=\lim_{x\to a}\frac{\left\{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2\right\}'}{\{(x-a)^3\}'}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)-f''(a)(x-a)}{3(x-a)^2} &&☜ これも \tfrac{0}{0} の不定形\\&=\lim_{x\to a}\frac{\{f'(x)-f'(a)-f''(a)(x-a)\}'}{\{3(x-a)^2\}'}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)-f''(a)}{6(x-a)}\\&=\frac{f'''(a)}{6} &&☜ f'''(a)=\lim_{x\to a}\tfrac{f''(x)-f''(a)}{x-a}\end{aligned}$$

よって

$$\frac{f(x)-\left\{f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2\right\}}{(x-a)^3}\quad\frac{f'''(a)}{6}$$

ゆえに x が a に近いとき

$$f(x) \qquad f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3$$

すなわち

3 次近似式 – 定理

$f'''(a)$ が存在するとき

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$$

誤差は $(x-a)^3$ より高位の微小量となる.

5.4　n 次近似の例

任意の自然数に対しても同様に証明できます. また, 主な関数の $x = 0$ の近くでの近似式は次の通りです.

$x = 0$ の近くでの n 次近似式

- $e^x \qquad 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$
- $\sin x \qquad x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$
- $\cos x \qquad 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $\log(1+x) \qquad x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$
- $\dfrac{1}{1-x} \qquad 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$
- $(1+x)^\alpha \qquad 1 + \dfrac{\alpha}{1!}x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n$

α は任意の実数. α が自然数のときは二項定理そのものです．また $\alpha = \frac{1}{2}$ とすると

$$\sqrt{1+x} \qquad 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \cdots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n$$

注3)

注3) $\frac{1}{1-x}$ の近似式は $(1+x)^\alpha$ の公式で $\alpha = -1$, x の代わりに $-x$ を代入しても得られます．また等比数列の和の公式を使ってもすぐ示せます．等比数列の和の公式より

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$

よって

$$\frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

誤差は x^{n+1} 程度の大きさで,「$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = 0$」ですから誤差は x^n よりも高位の微小量になります.

高次の近似式を使うと「近似の誤差」についても「おおよそ」分かります.

例 1　$\sin x \quad x - \frac{x^3}{6}$ だから $\sin x \quad x$ と近似したとき，その誤差はおよそ $\frac{x^3}{6}$. すなわち

$$\sin x \quad x \left(\text{誤差は}, x = 0 \text{ の近くではおよそ} \frac{x^3}{3!}\right)$$

例えば $x = \frac{\pi}{6}$ とすると

$$\sin \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{6} \left(\text{誤差は} \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^3}{6} \quad \frac{1}{48} \quad 0.020833\right)$$

実際,「$\sin \frac{\pi}{6} = 0.5$, $\frac{\pi}{6} \quad \frac{3.1415926}{6} = 0.523598$」ですからその誤差は 0.023598. よく一致しています.

例 2　$\log a$ や $\sqrt{a}$ の近似値も求まります.（$\sqrt{a}$ の近似に関しては **??**頁参照)

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots \qquad \cdots①$$

x の代わりに $(-x)$ を代入して

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \cdots \qquad \cdots②$$

(①−②) $\times \frac{1}{2}$ より

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right) \qquad \cdots(*)$$

$0 < x < 1$ のとき $\frac{1+x}{1-x}$ は 1 より大きい正の数全てを取れる．いま $\frac{1+x}{1-x} = 2 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{3}$ としてみると

$$\text{(3 次近似)} \quad \log 2 \quad 2\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\right\} = 0.6913580247$$

$$\text{(5 次近似)} \quad \log 2 \quad 2\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\right\} = 0.6930041152$$

実際の値は $\log 2 = 0.6931471806\cdots$ です.

例 3　e^x の近似式で $x = 1$ とおいて

$$e \quad 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

例えば

$$\begin{cases} n = 2 \text{ のとき} & 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2.5 \\ n = 3 \text{ のとき} & 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \quad 2.666666666 \\ n = 4 \text{ のとき} & 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \quad 2.708333333 \\ n = 5 \text{ のとき} & 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} \quad 2.716666667 \\ n = 6 \text{ のとき} & 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \quad 2.718055556 \\ n = 7 \text{ のとき} & 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} \quad 2.718253968 \end{cases}$$

$e \quad 2.718281828$ ですから, 誤差はやや $\frac{1}{(n+1)!}$ よりも大きくなっています．例えば $n = 7$ のときは「予想の誤差」は $\frac{1}{8!} \quad 0.0000248015$ ですが,「実際の誤差」は $2.718281828 - 2.718253968 = 0.00002786$ です．この数列の方が $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ よりも速く e に収束します.

第6章　付録

6.1　e の古典的な定義

指数 · 対数の極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \overset{e^x-1=t}{\longleftrightarrow} \lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=1 \longleftrightarrow \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e \longleftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

本文で $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ となるような指数関数の底を e と定義しましたが，昔は $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ の極限を e と定義しました．こうすると まったく図形的な直感によらず厳密に e を定義することができます．(これが 大学では最も普通の定義です.) しかし論理の流れが長くなるのが欠点 (?) です.

$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$ とします. 例えば

$$a_1=1+\frac{1}{1}=2, \qquad a_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}=2.25,$$
$$a_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=\frac{64}{27}=2.37037, \qquad a_4=\left(1+\frac{1}{4}\right)^4=\frac{625}{256}=2.441406,$$

このようにだんだん増加していきますが，これは 2 項定理を使って厳密に証明できます．二項定理より

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= {}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{n}\right)+{}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{n}\right)^n\\ &=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots2\cdot1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}\\ &=1+1+\frac{1\cdot(1-\frac{1}{n})}{2!}+\frac{1\cdot(1-\frac{1}{n})\cdot(1-\frac{2}{n})}{3!}+\cdots+\frac{1\cdot(1-\frac{1}{n})\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!}\end{aligned}$$

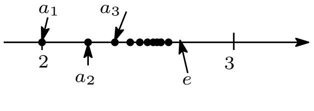
ここで n が増加すると各項は増加し，かつ 項数も増えるので a_n は増加します．また

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &=1+1+\frac{1\cdot(1-\frac{1}{n})}{2!}+\frac{1\cdot(1-\frac{1}{n})\cdot(1-\frac{2}{n})}{3!}+\cdots+\frac{1\cdot(1-\frac{1}{n})\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!}\\ &<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\ &<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} && ☜\ n!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots n>1\cdot2\cdot2\cdot2\cdots2=2^{n-1}\\ &=1+\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} && ☜\ \text{等比数列の和の公式}\\ &<3\end{aligned}$$

ゆえに a_n は単調増加し，かつ有界なので収束します．この極限値を e と定義します．[注1)] すなわち

e の古典的定義

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$



私が高校生のときは 高校の教科書でもこういう長い厳密な議論をしていました.

注1) 有界な単調数列は収束します．これは昔は高校の教科書には 載っていました.「当たり前」として使ってよいでしょう.

6.2　解答

練習 1

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot 3=3$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2\sin 3x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2\sin 3x)}{2\sin 3x}\cdot\frac{2\sin 3x}{3x}\cdot 3=6$

(3)「$x\to 0$ のとき, $x^2\to +0, \cos x\to 1$」だから, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x^2}=\infty$

(4) 加法定理，または和積の公式より

$$\begin{aligned}\cos 3x-\cos x&=\cos(2x+x)-\cos(2x-x)\\&=(\cancel{\cos 2x\cos x}-\sin 2x\sin x)-(\cancel{\cos 2x\sin x}+\sin 2x\sin x)\\&=-2\sin 2x\sin x\end{aligned}$$

☜「角度を $\alpha\pm\beta$ の形にする」

ゆえに

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}(-4)\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{\sin x}{x}=-4$$

Comment

答えだけならば $\sin\theta\quad\theta,\ \cos\theta\quad 1-\frac{1}{2}\theta^2$ を使っても求まります.

(1) $x\quad 0$ のとき $\displaystyle\frac{\sin 3x}{\sin x}\quad\frac{3x}{x}=3$　　(2) $\displaystyle\frac{\sin(2\sin 3x)}{x}\quad\frac{\sin(2\cdot 3x)}{x}\quad\frac{6x}{x}=6$

(3)$x\quad 0$ のとき

$$\cos 3x=1-\frac{1}{2}(3x)^2=1-\frac{9}{2}x^2,\ \cos x\quad 1-\frac{1}{2}x^2$$

ゆえに

$$\frac{\cos 3x-\cos x}{x^2}\quad\frac{\left(1-\frac{9}{2}x^2\right)-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^2}=\frac{-4x^2}{x^2}=-4$$

練習 2-1

(1)3　　(2)3　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{5^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{(\log 5)x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{(\log 5)x}-1}{(\log 5)x}\cdot\log 5=\log 5$

(4)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin x}-1}{x\log(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin x}-1}{x\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{\log(1+x)}=1\cdot 1=1$$

(5)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\cos x-1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\cos x-1)}{\cos x-1}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot(-1)=1\cdot\frac{1}{2}\cdot(-1)=-\frac{1}{2}$$

Comment

$x\quad 0$ のとき $e^x\quad 1+x,\ \log(1+x)\quad x$ を使ってもできます.

(4)$x\quad 0$ のとき

$$\frac{e^{x\sin x}-1}{x\log(1+x)}\quad\frac{x\cdot x}{x\cdot x}=1$$

(5)$x\quad 0$ のとき

$$\log(\cos x)=\log\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)\quad-\frac{1}{2}x^2.\qquad \text{ゆえに}\ \frac{\log(\cos x)}{x^2}\quad\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

練習 2-2

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^2=e^2$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}^2=e^2$

Comment

(1) は 「一年複利で金利が 100%のとき」に，一万円を瞬間複利法で 半年預けたときの預金が $\sqrt{e}$ 万円.
(2) は「一年複利で金利が 100%のとき」に，1 万円を 瞬間複利法で 2 年預けたときの預金が e^2 万円.
(3) は 「一年複利で金利が 200%のとき」に 1 万円を 瞬間複利法で 1 年預けたときの預金が e^2 万円.
となることをそれぞれ 表しています.

練習 3 (1)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)&=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1\right)}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

(2)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+4}{3x^2-3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}{3-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{3}$$

(3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+2x^2+x}{2x^3+3x^2-3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x+1}{2x^2+3x-3}=-\frac{1}{3}$$

(4)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+2^n+1}{3^n-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=3$$

(5)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}=-3$$

(6)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}=\lim_{n\to\infty}3\sqrt[n]{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

ここで

$$1<1+\left(\frac{2}{3}\right)^n<2$$

よって

$$1<\sqrt[n]{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}<\sqrt[n]{2}$$

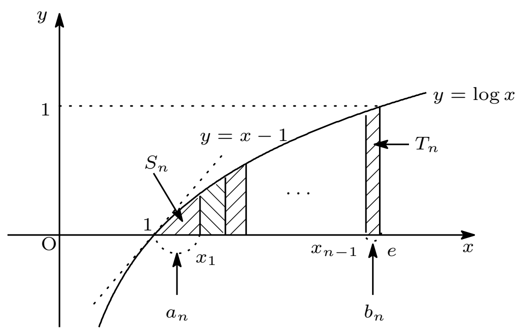
「$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$」だから，ハサミウチより

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=1$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+2^n}=3$$

(7)【考え方】$y=\log x$ の「$(1,0)$ における接線の傾きは 1 」ですから n が非常に大きいとき，$x=x_1$ の左側の領域の面積 S_n は「等辺が a の直角二等辺三角形」の面積で近似できる．一方 $x=x_{n-1}$ の右側の領域の面積 T_n は「縦が $\log e=1$, 横が b の長方形」の面積で近似できるから

$$S_n \quad \frac{1}{2}{a_n}^2, \qquad T_n \quad b_n$$



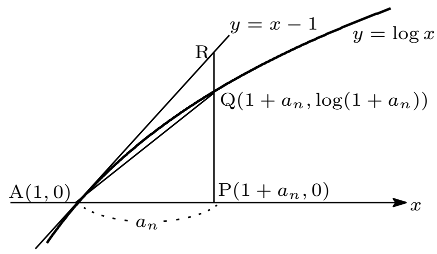
仮定より $S_n=T_n$ だから n が非常に大きいとき

$$\frac{1}{2}{a_n}^2 \quad b_n. \qquad \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{{a_n}^2}=\frac{1}{2}$$

と予想できる．あとはこれを「ハサミウチ」か「積分公式」を使って証明すればよい．

【解答】$\mathrm{A}(1,0)$, $\mathrm{P}(1+a_n,0)$, $\mathrm{Q}(1+a_n,\log(1+a_n))$, $\mathrm{R}(1+a_n,a_n)$ とする．$y=\log x$ の「点 A における接線の傾きは 1」かつ「$y=\log x$ は上に 凸」だから $y=\log x$ は 直線 $y=x-1$ の下側にある．よって $x=x_1$ の左側の領域の面積を S_n とすると

$$\triangle\mathrm{APQ}<S_n<\triangle\mathrm{APR}\iff \frac{1}{2}a_n\log(1+a_n)<S_n<\frac{1}{2}{a_n}^2 \qquad \cdots①$$

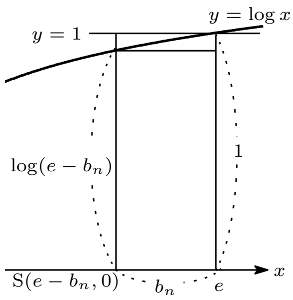


$x=x_{n-1}$ の右側の領域の面積を T_n とすると右下図より

$$b_n\log(e-b_n)<T_n<b_n \qquad \cdots②$$

ところが仮定より $S_n=T_n$ だから ①,② より

$$\frac{1}{2}a_n\log(1+a_n)<S_n=T_n<b_n \text{ かつ}$$
$$b_n\log(e-b_n)<T_n=S_n<\frac{1}{2}{a_n}^2$$



したがって

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\log(1+a_n)}{a_n}<\frac{b_n}{{a_n}^2}<\frac{1}{2\log(e-b_n)} \qquad \cdots③$$

$n\to\infty$ のとき，$a_n\to 0, b_n\to 0$ は明らかだから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+a_n)}{a_n}=\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=1,\ \text{かつ}\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\log(e-b_n)}=\frac{1}{2\log e}=\frac{1}{2}$$

よってハサミウチより

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{{a_n}^2}=\frac{1}{2}$$

Comment

S_n に関しては接線を考え，T_n に関しては接線は考えていない理由が分かるだろうか？　$\log e=1\fallingdotseq 0$ なので，「T_n の主要部分は長方形」であるが，$\log 1=0$ なので「S_n の主要部分は直角二等辺三角形」になる訳です．

internet 上の数学

(1)`http://mixedmoss.com`
(2)`http://www.geogebra.org`
(3)`http://www.cabri.com`
(4)`http://www.wolframalpha.com`

(1) 私の個人的に運営しているサイトです．自作のソフト，数学の問題, 非ユークリッド幾何などの解説を置いています．今日使った *MuPAD* の詳しい解説も置いています．(*MuPAD* は昔は free だったのですが, 残念ながら 現在では 高くなってしまいました.)

(2) geogebra という free の数学ソフトのサイトです．グラフを描いたり，幾何の図形を簡単に描くことができます．今日の授業では *MuPAD* と共に使用しました.

(3) cabri という幾何の数学ソフトのサイトです．geogebra と類似していますが，こちらの方がより「幾何的」になっています．今日の授業では使いませんでしたが，私のサイトに置いてあるファイルでは　たくさん使っています.

(4) Mathematica という超有名な CAT(Computer algebra system) のサイトが運営している free のサイトです．Mathematica は幾何ソフトではなく，代数計算のソフトです．極限，微分や積分の式が求まります．(下の表参照) 私のサイトに超簡単な解説を置いてあります.

サイトに行き $\boxed{}$ の中に コマンドと関数を入力します．例えば，これで $y = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ のグラフが表示されます．なお，入力例で `x sin x` とある時は，必ず指定されたように空欄を空けてください．また全ての入力は いわゆる半角入力 (直接入力) にします.

操作	**コマンド**	**入力例**	**例の意味**
グラフ	plot	`plot sin 2x, x=0..pi`	$y = \sin 2x (0 \leqq x \leqq \pi)$ のグラフ
微分	d/dx	`d/dx sin x`	$\frac{d}{dx}\frac{\sin x}{}$
積分	int	`int sin(x), x=0..pi`	$\int_0^{\pi} \sin x dx$
極限	lim	`lim (sin x)/x as x->0`	$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$
掛け算	* (省略可)	`x*sin x または x sin x`	$x \sin x$
割り算	/	`(sin x)/x`	$\frac{\sin x}{x}$
累乗	^	`x^2 log x`	$x^2 \log x$
定数 e, π	e, pi	`int sin x, x=0..2pi`	$\int_0^{2\pi} \sin x dx$
絶対値	| |	`plot |x^2-3x|`	$y = \|x^2 - 3x\|$ のグラフ