1．空間ベクトルの定義，和，差，実数倍

1-0. 空間ベクトルの定義

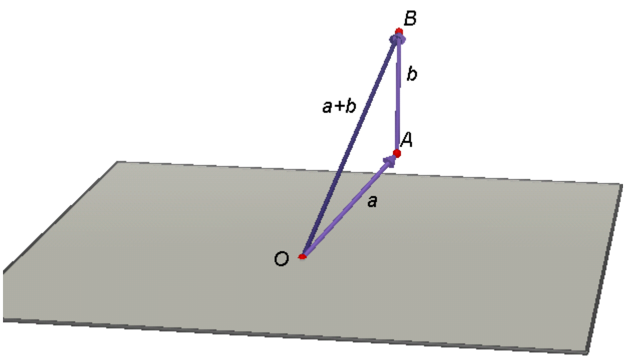
平面ベクトルと同様に，「長さ」と「方向」だけで表すことが出来るもので，例えば，力，風，速度などは全て**空間ベクトル**と考えることができます．というか，この世界は 3 次元なので，本当は**空間ベクトルのほうが本来の姿で，平面ベクトルは，空間ベクトルの特別なもの** です．平面と同様に，**空間ベクトル**の例として「**空間での移動**」を考えることにし，「**移動**」の「始点」と「終点」だけを考え，途中でどのような経路をとったかは問題としないものとします．平面の移動と空間の移動のもっとも大きな違いは，空間には「高さ」があるが，平面にはない ということです．例えば，空間では「東に 10ｋｍ，北に 5ｋｍ移動して，マンションの 10 階まで上がる」と言う**立体的な移動**が考えられるが，平面では「東に 10ｋｍ，北に 5ｋｍ移動」のような**平面的な移動**しか考えられません．喩えて言えば「平屋建ての世界」が平面ベクトルの舞台で，「2 階建て以上の世界」が空間ベクトルの舞台です．（もちろん「平屋建ての世界」も本当は「空間」で「厚みがある」ので，真の「平面の移動」というのは，この世ではありえません．）

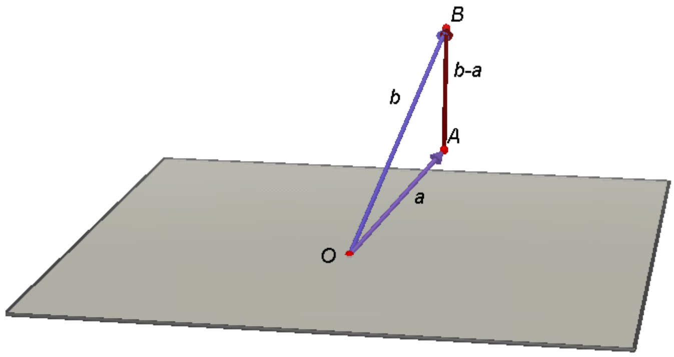
1-1.空間ベクトルの和，差，実数倍の定義

空間ベクトルの和，差，実数倍の定義は平面と全く同じとします．これが可能なのは，二つのベクトルを，足したり，引いたりしているときは，その二つのベクトルを含む平面上で考えているからです．

例えば，左下図で $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ ですが，このとき，平面 OAB 上で考えています．（平面 OAB 以外の世界は，この二つのベクトルの和とは，無関係.）

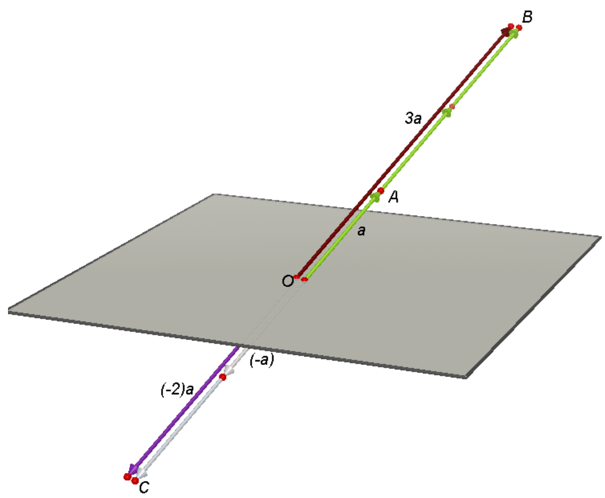
同様に，右下図で $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$ ですが，このときも，平面 OAB 上で考えています．





同様に，右図で，$\overline{OB}=3\overline{OA},\overline{OC}=2\overline{OA},\overrightarrow{OA}=\vec{a}$
とすると，$\overline{OB}=3\vec{a},\overrightarrow{OC}=-2\vec{a}$ となります．

定数倍に関しては，直線 OA 上で考えています．



1-2.空間ベクトルの和，差，実数倍の計算法則

空間ベクトルに関しても，平面ベクトルと同様の計算法則が成り立ちます．

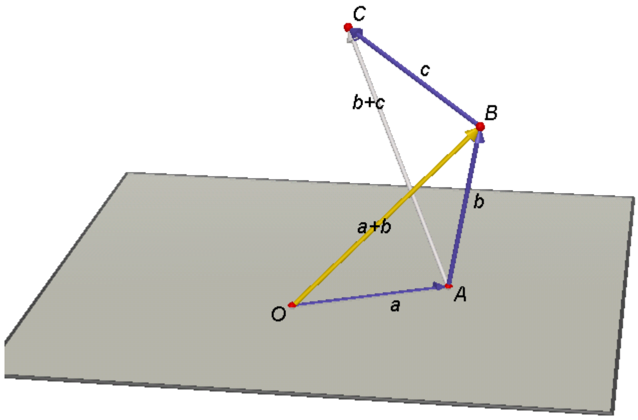
$$\begin{cases} 1^\circ \quad \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \quad (\text{交換法則}) \\ 2^\circ \quad (s+t)\vec{a}=s\vec{a}+t\vec{a} \\ 3^\circ \quad s(t\vec{a})=st\,\vec{a} \\ 4^\circ \quad (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \quad (\text{結合法則}) \\ 5^\circ \quad k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b} \quad (\text{三角形の相似}) \end{cases}$$

このうち「1° と 5°」は平面上で，「2° と 3°」は直線上で考えればよいので，当然成立します．「4°」の場合は，4 点 O,A,B,C は同一平面上にあるとは限りません．しかし，右下図で，

$$\begin{cases} (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}} \end{cases}$$

$$\therefore (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

となり，「4°」も成立します．



1-3 空間ベクトルの分解

同一平面上にない異なる 4 点 O,A,B,C があって，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とします.(このようなとき，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は一次独立と言います.）　このとき，空間内の任意の点を P とすると，下図のような平行六面体をつくることができます.（P を通り，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ に平行な平面と直線 OA の交点を A’，$\vec{c}$ と $\vec{a}$ に平行な平面と直線 OB の交点を B’，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ に平行な平面と直線 OC の交点を C’ とすれば良いです.）よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}}+\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$$

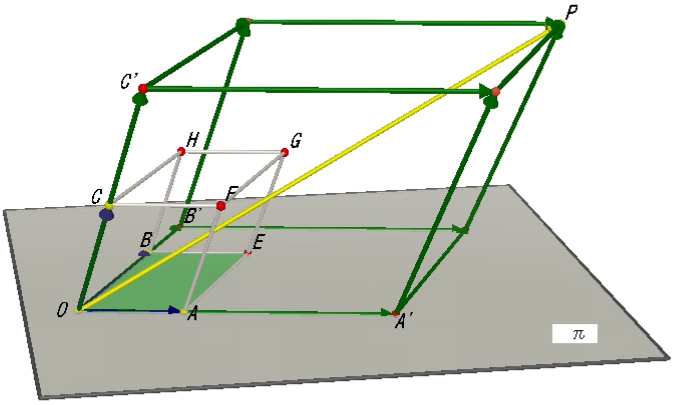
ところが，A’,B’,C’はそれぞれ直線 OA，OB，OC 上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB'}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OC'}}=u\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad \left(s,t,u \text{ は実数で, } |s|=\frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{OA}},\ |t|=\frac{\mathrm{OB'}}{\mathrm{OB}},\ |u|=\frac{\mathrm{OC'}}{\mathrm{OC}}\right)$$

と表せます．即ち，空間内の任意ベクトルを $\vec{p}$ とすると，

$$\vec{p}=s\,\vec{a}+t\,\vec{b}+u\,\vec{c}\quad (s,t,u \text{ は実数})$$

とただ一通りに表せます.



一方，平面上の任意のベクトル $\vec{p}$ は，

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}\quad (s,t \text{ は実数})$$

とただ一通りに表せました.

このように，平面と空間のもっとも大きな違いは，

平面では二つの一次独立なベクトルが必要なのに対し，空間では 3 つの一次独立なベクトルが必要

になる点です.

1-3-1. Cabri3D による検証

P を Drag して，(s,t,u) の値を読み取ってください．なお，点を上下に移動するには「Shift キー」を押したままで Drag します.「Shift キー」を押さないとベースの平面と平行に動くだけです．また視点を変えるには，マウスの右ボタンを押したままで「ぐりぐり」します.

linear1.html,　linear2.html