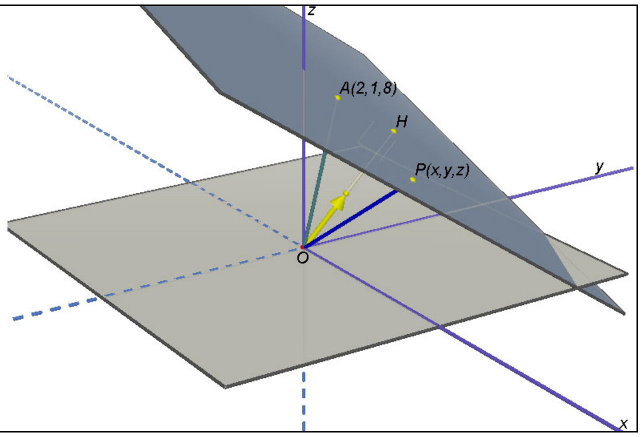
5. 平面の方程式と内積，点と平面の距離の公式

例 1.

$A(2,1,8)$ を通り，$\vec{n}=(1,2,3)$ と直交する平面を π，O から π に下ろした垂線の足を H とする．

(1) π 上の任意の点を $P(x,y,z)$ とするとき，x, y, z の間の関係式を求めよ．

(2) OH の長さを求めよ．

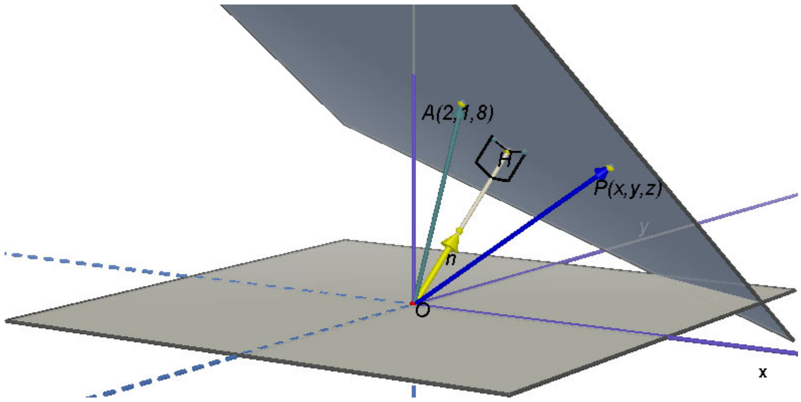


(1) 直線 OH を「スクリーン」として，内積の正射影としての意味を使うと，

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\mathrm{OH}\times|\vec{n}| \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\mathrm{OH}\times|\vec{n}|\end{cases}\cdots①$$

ゆえに，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\quad\cdots②$$



②を成分で表示すると，

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\8\end{pmatrix}\Longleftrightarrow x+2y+3z=28\cdots③\qquad\cdots(ans)$$

(2) ③は，「$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=28$（一定)」を表しています．よって①より，

$$\mathrm{OH}=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\vec{n}|}=\frac{28}{\sqrt{14}}=2\sqrt{14}\qquad\cdots(ans)$$

【注】②は「$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の OH の上への正射影は同じ!」を表しています．なお②は，

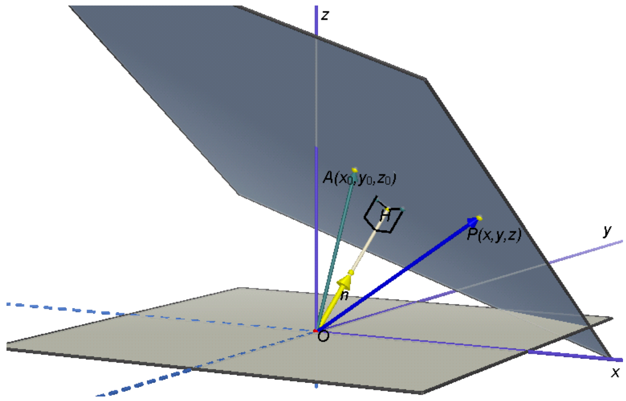
$$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}\Longleftrightarrow\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0\Longleftrightarrow\vec{n}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0\Longleftrightarrow\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

としても得られます．正射影が分かっていなくとも理解できるので，教科書はこちらになっています．

5-1. 平面の方程式，原点と平面の距離の公式

一般に，$\vec{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に垂直で，点 $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$ を通る平面上の点を $\mathrm{P}(x, y, z)$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の $\vec{n}$ の上への正射影は同じだから，



$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

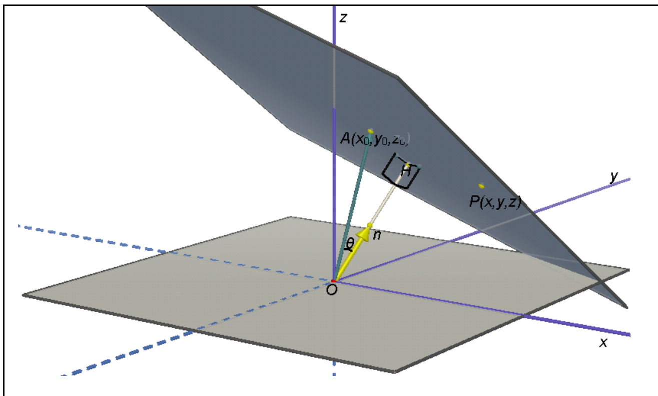
成分表示では，

$$ax+by+cz=ax_0+by_0+cz_0$$

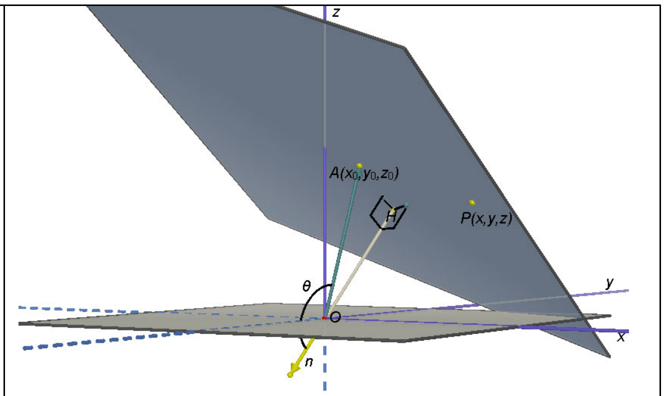
すなわち，

$\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$ を通り，$\vec{n}=(a, b, c)$ に垂直な平面 π 上の点を $\mathrm{P}(x, y, z)$ とすると，
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{n} \iff (\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\vec{n}=0 \iff \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} \iff ax+by+cz=ax_0+by_0+cz_0$

このように，$ax+by+cz=d$ は，$\vec{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に垂直な平面を表します．



[$0\leq\theta\leq 90^\circ$ のとき]



[$90^\circ<\theta\leq 180^\circ$ のとき]

また O から平面 π に下ろした垂線の足を H，$\vec{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のなす角を θ とすると，「正射影」の考え方から

$$\begin{cases} 0^\circ\leq\theta\leq 90^\circ \text{のとき},\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=|\vec{n}|\times\mathrm{OH} \\ 90^\circ<\theta\leq 180^\circ \text{のとき},\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-|\vec{n}|\times\mathrm{OH} \end{cases}$$

「$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=ax_0+by_0+cz_0=-d$」とおくと，平面 π の式は，「$\pi: ax+by+cz+d=0$」．
よって，「$\pi: ax+by+cz+d=0$」と原点との距離は

$$\boxed{\mathrm{OH}=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|}{|\vec{n}|}=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0\right|}{|\vec{n}|}=\frac{|d|}{|\vec{n}|}}$$

5-2. 点と平面の距離(一般の場合)

例2

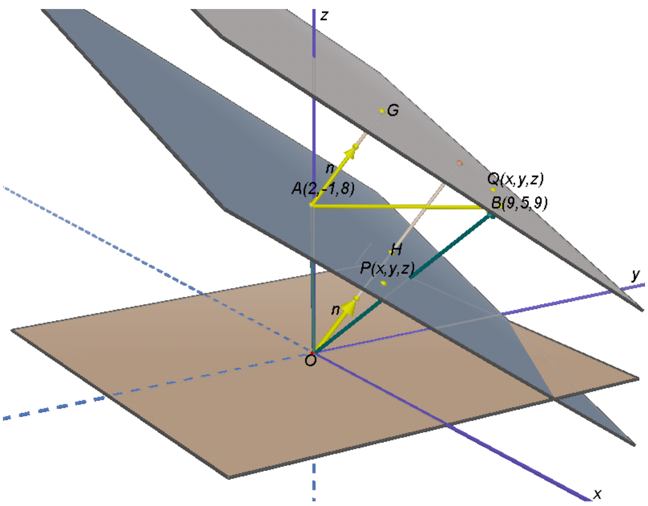
A $(2,-1,8)$ を通り $\vec{n}=(1,2,3)$ と直交する平面を π_1 ,

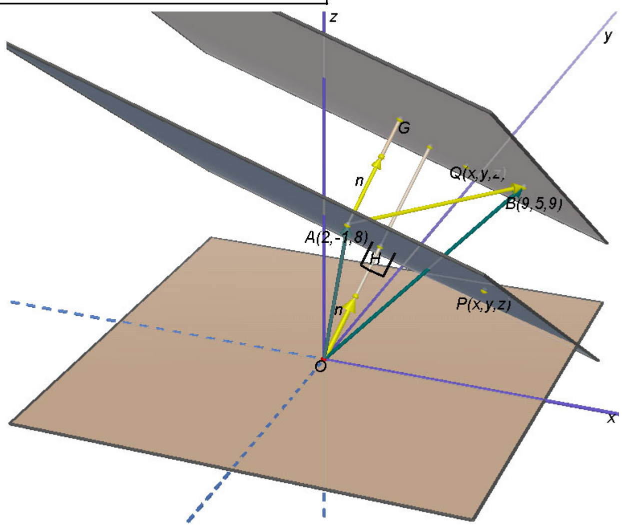
B $(9,5,9)$ を通り $\vec{n}$ と直交する平面を π_2 とする.

(1) π_1 上の任意の点を $\mathrm{P}(x,y,z)$ とするとき, x,y,z の間の関係式を求めよ.

(2) π_2 上の任意の点を $\mathrm{Q}(x,y,z)$ とするとき, x,y,z の間の関係式を求めよ.

(3) π_1 と π_2 の距離 (図のAG) を求めよ.





(1) 「$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$」だから

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\8\end{pmatrix}\Longleftrightarrow x+2y+3z=24\cdots①$$

(2) 「$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$」だから

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\5\\9\end{pmatrix}\Longleftrightarrow x+2y+3z=46\cdots②$$

(3) $\vec{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のなす角は鋭角だから，($\vec{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のなす角が鈍角のときは $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-|\vec{n}|\times\mathrm{AG}$ です.)

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=|\vec{n}|\times\mathrm{AG}$$

ゆえに,

$$\mathrm{AG}=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\vec{n}|}=\frac{\vec{n}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})}{|\vec{n}|}=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\vec{n}|}\cdots③$$

①より「$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=24$」, ②より「$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=46$」だから，③へ代入して,

$$\mathrm{BH}=\frac{46-24}{|\vec{n}|}=\frac{22}{\sqrt{14}}\qquad\cdots(ans)$$

5-3. 点と平面の距離の公式(一般の場合)

$\vec{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のなす角は鋭角とは限らないので，③の式は，一般には次のようになります．

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{cases}|\vec{n}|\times\mathrm{AG} & (0^\circ\leq\theta\leq 90^\circ\text{のとき})\\ -|\vec{n}|\times\mathrm{AG} & (90^\circ<\theta\leq 180^\circ\text{のとき})\end{cases},\qquad (\text{但し，}\theta\text{は}\vec{n}\text{と}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\text{のなす角})$$

故に，一般に，

互いに平行な2平面「$ax+by+cz=d_1$」と「$ax+by+cz=d_2$」との距離は，

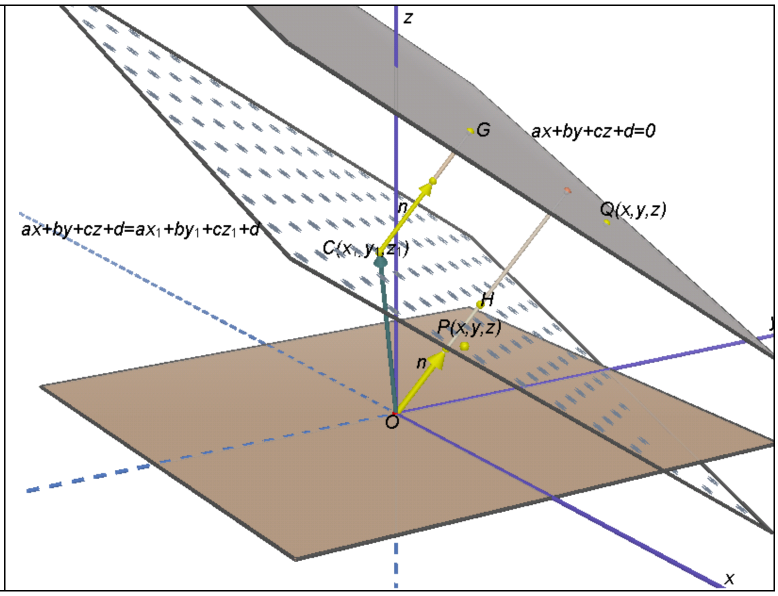
$$h=\frac{|d_1-d_2|}{|\vec{n}|}\cdots(*)$$

【注】特に，原点を通る平面「$ax+by+cz=0$」と「$ax+by+cz=d$」との距離は「$h=\dfrac{|d|}{|\vec{n}|}$」となります．

これを使って 点 $\mathrm{C}(x_1,y_1,z_1)$ と平面「$\pi:ax+by+cz+d=0$」との距離を求めるのは簡単です．

C を通り，π に平行な平面の式は，

$$ax+by+cz+d=ax_1+by_1+cz_1+d\cdots①$$



ゆえに(*)から，

点(x_1,y_1,z_1) と平面 $ax+by+cz+d=0$ との距離を h とすると，

$$h=\frac{|d_1-\mathrm{d}_2|}{|\vec{n}|}=\frac{|(ax_1+by_1+cz_1+d)-0|}{|\vec{n}|}=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+\mathrm{c}^2}}\cdots(**)$$

これが「**点と平面との距離の公式**」です．個人的には(*)の方が，意味が明確で良いと思います．

公式の分子の「$ax_1+by_1+cz_1+d$」は，①の右辺の値を，分母は法線ベクトルの長さを表しています．

【注】(*)や(**)の公式は入試ではそのまま使えないことが多いと思います．証明しながら使いましょう．次節の例題を参照してください．

5-4. Cabri3D による検証

互いに平行な2平面「$ax+by+cz=d_1$」と「$ax+by+cz=d_2$」との距離は,

$$h=\frac{|d_1-d_2|}{|\vec{n}|}\cdots(*)$$

を Cabri3D で確かめましょう．法線ベクトルは 「$\vec{n}=(1,2,3)$」で固定です．点 A,B を動かしてみてください．A や B の(x,y,z)成分を使って「$x+2y+3z$」の値(d_1とd_2)を計算してみてください．HG の長さを電卓で計算してみて，上の公式の結果と一致することを確かめてみてください．

distance between 2 planes.html

点を上下に移動するには「**Shift** キー」を押したままで **Drag** します．「**Shift** キー」を押さないとベースの平面と平行に動くだけです．また視点を変えるには，マウスの右ボタンを押したままで「ぐりぐり」します．