

2.内積の分配法則

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

2-1.正射影を使った図形的証明

高校でのやり方と違い「内積≡正射影」を使って、内積の分配法則を導いてみます。(香港の教科書ではこのやり方でやっているものもあります.)

$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \vec{c} = \overrightarrow{OC}$, さらに B,C から直線 OA に下ろした垂線の足を B',C', さらに, B を通り \vec{a} と平行な直線に C から下ろした垂線の足を H とします. このとき, 「 $\vec{a} \perp \overrightarrow{CC'}$ かつ $\vec{a} \perp \overrightarrow{CH}$ 」だから, 「平面CC'H ⊥ 直線OA」. よって 四角形 BB'C'H は長方形 となります.

(i) $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{B'C'}$ が \overrightarrow{OA} と同じ方向を向いているとき,
直線 OA を「スクリーン」と考えて正射影することにより,

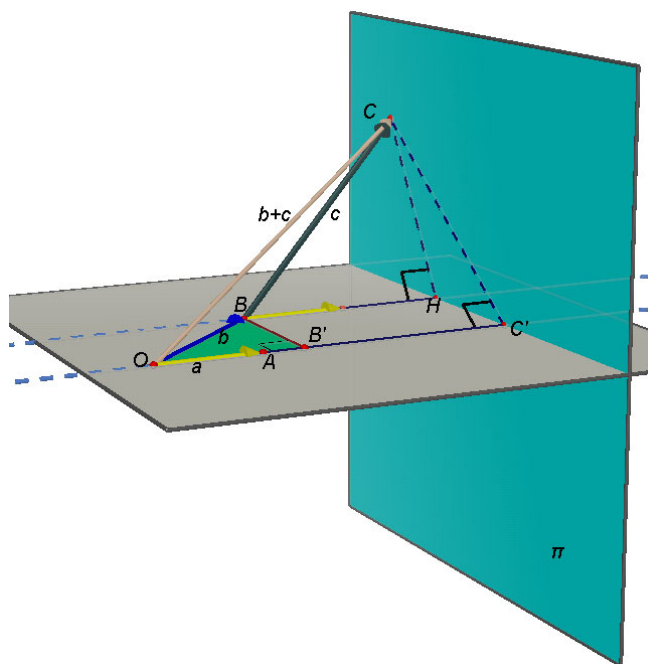
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = OA \times OB', \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = OA \times OC'$$

さらに, \vec{a} の始点を B に平行移動し, 直線 BH を「スクリーン」と考えて正射影すると,

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \times BH = OA \times B'C'$$

ところが「 $OB' + B'C' = OC'$ 」だから,

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} &= OA \times OB' + OA \times B'C' \\ &= OA \times (OB' + B'C') \\ &= OA \times OC' \\ &= \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) \end{aligned}$$



[注] $\vec{b}, \vec{c}, (\vec{b} + \vec{c})$ の直線 OA 上への正射影ベクトルは, それぞれ $\overrightarrow{OB'}$ と $\overrightarrow{B'C'}$ ($= \overrightarrow{BH}$), $\overrightarrow{OC'}$ です.
 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が同一平面上になくとも,

$$\text{「}(\vec{b} + \vec{c} \text{の正射影ベクトル)} = (\vec{b} \text{の正射影ベクトル)} + (\vec{c} \text{の正射影ベクトル)}\text{」}$$

が成り立つことがポイントになります.

(ii) $\overline{OB'}$ が \overline{OA} と同じ方向, $\overline{OC'}$ と $\overline{B'C'}$ は \overline{OA} と反対方向を向いているとき
直線 OA を「スクリーン」と考えて正射影することにより,

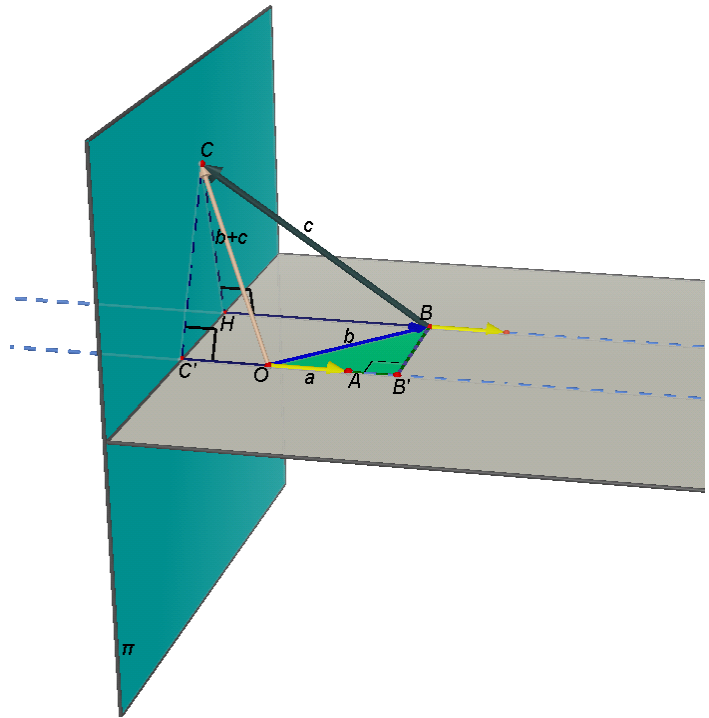
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = OA \times OB', \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = -OA \times OC'$$

さらに, \vec{a} の始点を B に平行移動し, 直線 BH を「スクリーン」と考えて正射影すると,

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = -|\vec{a}| \times BH = -OA \times B'C'$$

ところが「 $OB' - B'C' = -OC'$ 」だから,

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} &= OA \times OB' - OA \times B'C' \\ &= OA \times (OB' - B'C') \\ &= OA \times (-OC') \\ &= \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) \end{aligned}$$



(i),(ii)以外の場合でも, 同様にして証明されます. (略)

2-2. Cabri 3 D による検証.

A,B,C を Drag してみてください. 点を上下に移動するには「Shift キー」を押したままで Drag します. 「Shift キー」を押さないとベースの平面と平行に動くだけです. また視点を変えるには, マウスの右ボタンを押したままで「ぐりぐり」します.

distribution.law.html