0.内積の定義

0-1 定義

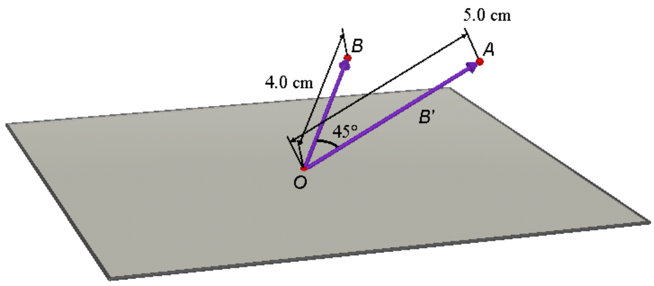
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が空間ベクトルのときも内積の定義は全く同じです．すなわち，

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$$

と定義します．例えば右図のような場合は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 4\times5\times\cos45° = 20\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}\ \ (cm^2)$$

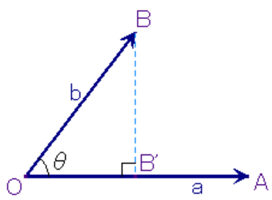
です．



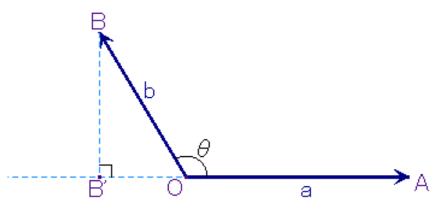
1. 内積と正射影（内積の図形的意味）

平面ベクトルと同様に，内積は正射影です．

$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のはさむ角を θ，$\vec{b}$ の終点 B から直線 OA に下ろした垂線の足を B' とすると，「$\vec{a}\cdot\vec{b} = \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\theta$」だから，

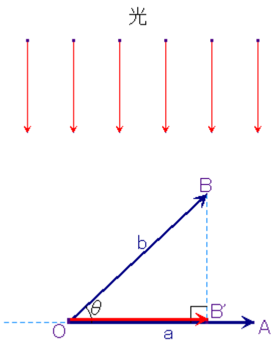


0° ≦θ≦90° のとき
a・b=OA*OB*cosθ=OA*OB′

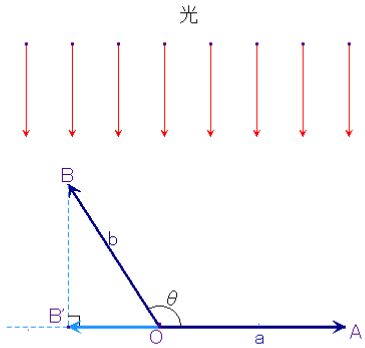


90° ＜θ≦180° のとき
a・b=OA*OB*cosθ=OA*(−OB′)=−OA*OB′

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の「直線 OA の上への正射影ベクトル」といいます．下図のように，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に対し垂直に光が当たったとき，「直線 OA をスクリーンと考えたとき出来る $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の影」と言う感じです．図では，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と同じ方向を向いているとき「赤色」で，反対方向を向いているとき「水色」で表しています．



$0^{\circ} \leq \theta \leq 90^{\circ}$ のとき

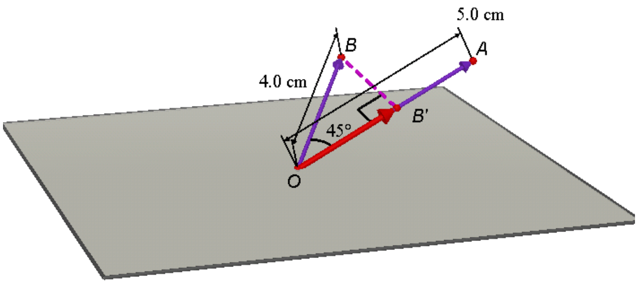


$90^{\circ} < \theta \leq 180^{\circ}$ のとき

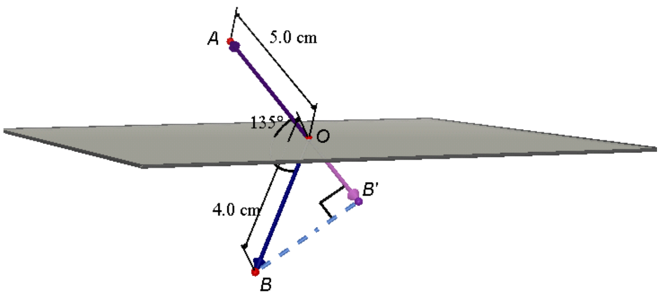
この「スクリーン」と「影」と言う表現を使うと，内積は 「(スクリーンの長さ)×(影の長さ)」と言うこともできます．但し正射影ベクトル$\overrightarrow{OB'}$が$\overrightarrow{OA}$と同じ方向を向いている時は「(影の長さ)=$\overline{OB'}$」，$\overrightarrow{OB'}$が$\overrightarrow{OA}$と反対方向を向いているときは，「(影の長さ)=$-\overline{OB'}$」，「(スクリーンの長さ)=$\overline{OA}$」です．

例えば，左下図の時，$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB' = 5 \times 2\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$，

右下図の時，$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -OA \times OB' = -5 \times 2\sqrt{2} = -10\sqrt{2}$ です．



[$0 \leq \theta \leq 90°$の時]



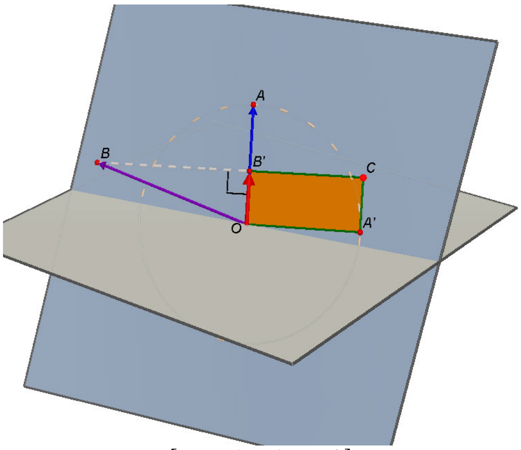
[$90° < \theta \leq 180°$の時]

以上の「内積の定義」と「内積と正射影の関係」は，平面と全く同じです．これは，「空間ベクトルの和・差」と同様に，二つのベクトルの内積を考えるときは，その二つのベクトルの作る平面上で考えるからです．

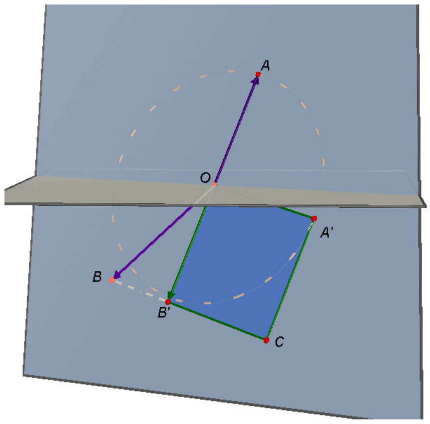
1-1. Cabri3D による検証

A,B を drag してください．　　definition.html

さらに，平面と同様に「**符号付面積**」として見ることも出来ます．下図の平面 AOB 上で，A'は A を O の周りに$(-90°)$回転した点とします．すると，内積は 「四角形 OA'CB'の符号付面積」です．ただし正射影ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$が$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と同じ方向を向いているときは「四角形 OA'CB'の符号付面積$=\overline{\mathrm{OA'}}\times\overline{\mathrm{OB'}}$」，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$が$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と反対方向を向いているときは，「四角形 OA'CB'の符号付面積$=-\overline{\mathrm{OA'}}\times\overline{\mathrm{OB'}}$」と定めます．
図では正の符号付面積は「赤色」で負の符号付面積は「水色」で表しています．ただ，「**符号付面積**」の考え方は，平面ほどは解かり易くありません．（特に 「分配法則の証明」のとき．）



[正の符号付面積]



[負の符号付面積]

1.2. 例題

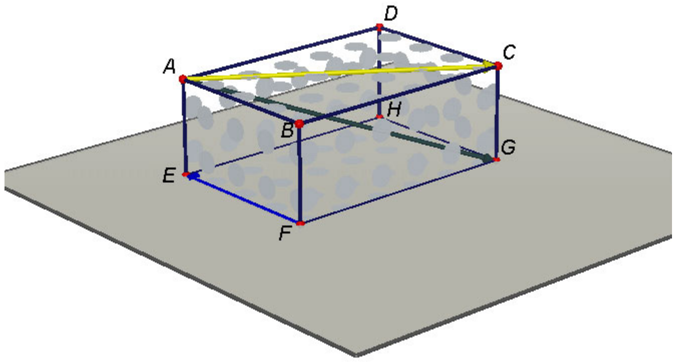
[例 1]

直方体ABCD-EFGHがあり，AB=3, AD=4, AE=2 である．
このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FE}}$ を求めよ．

[解答]

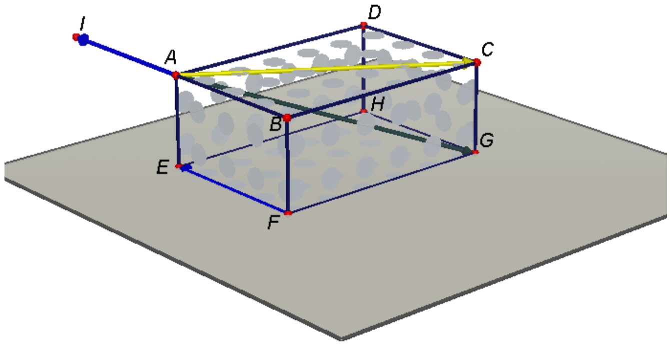
(1) 直線 AC を「スクリーン」とみることにより，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \mathrm{AC}\times\mathrm{AC} = \mathrm{AC}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{CD}^2 = 25$$



(2) $\overrightarrow{\mathrm{FE}}$ の始点を A に移動して $\overrightarrow{\mathrm{FE}} = \overrightarrow{\mathrm{AI}}$ となるように点 I をとる．直線 AB を「スクリーン」と見ることにより，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AI}} = -\mathrm{AI}\times\mathrm{AB} = -3\times3 = -9$$



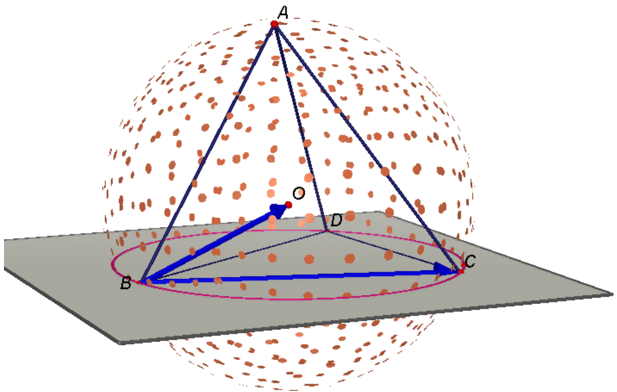
[例 2] (外接球)

四面体A-BCDの外接球の中心をOとする．BC=3のとき，$\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を求めよ．

[解答]

直線 BC をスクリーンと考えることにより，

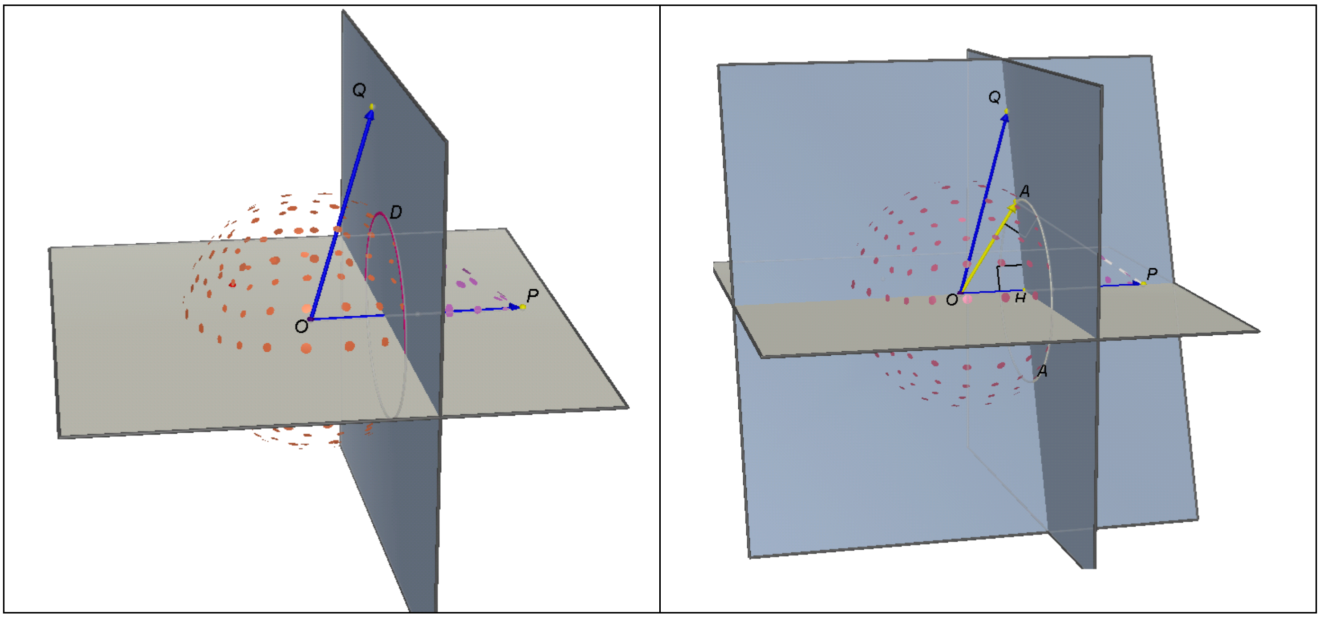
$$\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \left(\frac{1}{2}\mathrm{AB}\right)\times\mathrm{AB} = \frac{3}{2}\times3 = \frac{9}{2}$$



[例 3](極面の式)

球 S の半径は 3，P は球 S の外部にある点で, P から球 S に引いた接線の集合は円になる．この円を D とする．Q が D を含む平面上にある時，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の値を求めよ．

[注]この問題は，小林先生に教えていただきました．ありがとうございます．



[解答]（Step1）
Q から直線 OP におろした垂線の足を H，P から球 S に引いた接線と球 S の接点のうち，平面 OPQ 上にある点を A とする．直線 OP を「スクリーン」と見ると，

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \mathrm{OP}\times\mathrm{OH}, \\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \mathrm{OP}\times\mathrm{OH} \end{cases} \qquad \therefore \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdots①$$

(Step2) 次に，直線 OA を「スクリーン」と見ると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \mathrm{OA}\times\mathrm{OA} = 3^2 = 9\cdots②$$

①,②より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 9$$