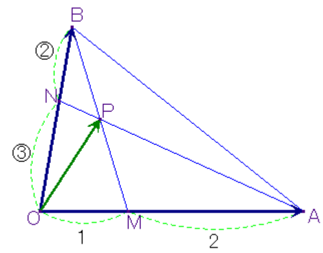
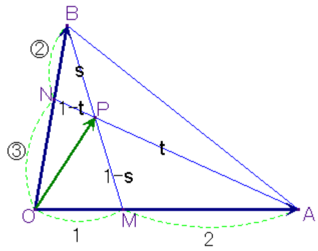
5 問題への応用

試験の問題に応用してみます.

[例 1] 線分 OA を 1:2 に内分する点を M, 線分 OB を 3:2 に内分する点を N とする. このとき直線 AN と直線 BM の交点 P を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ で表せ.



[解 1]（最も標準的な解法）



P は線分 AN, BM を内分しているので, $BP:PM = s:(1-s)$, $AP:PN = t:(1-t)$ $(0<s<1, 0<t<1)$ とおける.（P が AB を外分している時は, このように置けません. 直接, 下の式を書き下します.）

よって

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = (1-t)\,\overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{ON} = (1-t)\,\overrightarrow{OA} + \dfrac{3}{5}t\,\overrightarrow{OB} \cdots ① \\ \overrightarrow{OP} = (1-s)\,\overrightarrow{OB} + s\,\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{3}s\,\overrightarrow{OA} + (1-s)\,\overrightarrow{OB} \cdots ② \end{cases}$$

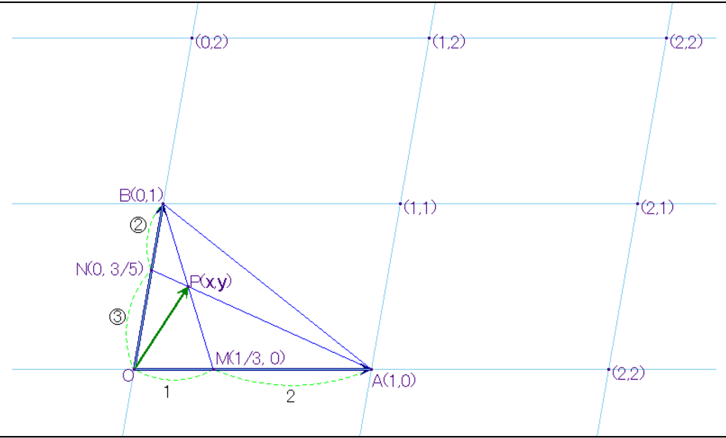
「$\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ $(\alpha, \beta$は実数$)$」とただ一通りに表せるので, ①, ②より,

$$\begin{cases} 1-t = \dfrac{1}{3}s \\ \dfrac{3}{5}t = 1-s \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} t = \dfrac{5}{6} \\ s = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

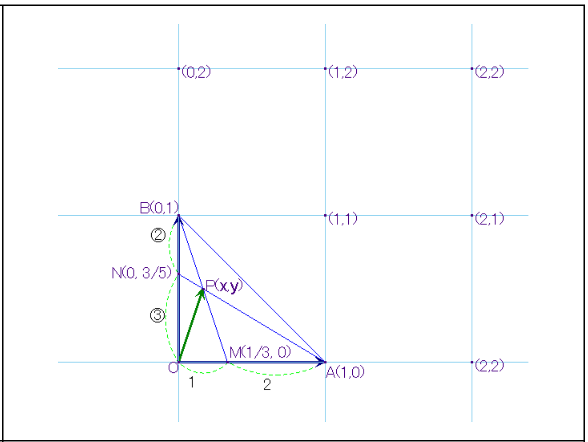
①へ代入して

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \cdots (ans)$$

[解 2]（斜交座標を利用した解法）



斜交座標



直交座標

「$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　(x, yは実数)」とおくと，P は直線 AN 上より

$$y = -\frac{3}{5}x + \frac{3}{5} \cdots ①$$

[←直交座標を参考に求める]

P は直線 BM 上より

$$y = -3x + 1 \cdots ②$$

[←直交座標を参考に求める]

①と②を連立して，

$$(x, y) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$$

[←直交座標における P の座標と同じ!!]

よって，

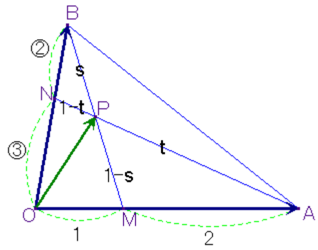
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \cdots (ans)$$

このやり方は一番速いです．しかし，記述では，点数をもらうのは難しいでしょう．（個人的には．「必要とあれば，厳密な書き方もできる」のなら，満点を上げても良いと思っています．）

[解 3]（解 1＋解 2）
[解 2]は非常に早いですが，記述式では減点されるでしょう．しかし[解 1]を利用して，厳密化できます．

[解 1]と同様にして，

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{ON}} = (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{3}{5}t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdots ① \\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s)\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{3}s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-s)\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdots ② \end{cases}$$



「$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$」とおくと，①より

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = \frac{3}{5}t \end{cases}$$

これから t を消去して，

$$y = \frac{3}{5}(1-x) \cdots ③$$

この式は，「**解 2**」の**①の式と一致する!**　同様に，②より

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}s \\ y = 1-s \end{cases}$$

これから s を消去して，

$$y = 1-3x \cdots ④$$

この式は，「**解 2**」の**②の式と一致します!**　③と④を連立して，

$$(x, y) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdots (ans)$$

【注】しかしこのやり方は実戦的ではありません．「直線のパラメーター表示」を，わざわざ 「x と y の式」に代えて交点を出しています．しかし，

「$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$」と言う表し方は，$x + y = 1$ 上の点を $(1-t, t)$ とパラメータ表示したもの

となることは分かって頂けたと思います．[解 2] は，答えだけが欲しい時，または難問で「見通し」を得るときに役立ちます．さらに，メネラウスやチェバの定理を使う方法もありますが，割愛します．

[例 2] 平面上に三角形 OAB があり，実数 α, β が，次の条件を満たしながら変化するとき，「$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$」で表される点 P の存在する範囲を示せ.
(1) $\alpha + 2\beta = 2$
(2) $1 \leq \alpha + 2\beta \leq 2$, $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$

[解 1]（共線条件を使ったやり方）
途中の経過も書かなくてはいけない時は「共線条件」だけを使って導くのが良いでしょう．そのために「$s + t = 1$」の形を作ります.

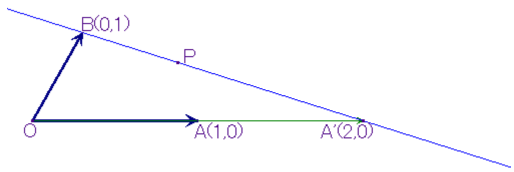
(1) 「$\alpha + 2\beta = 2$」の両辺を 2 で割ると，

$$\frac{\alpha}{2} + \beta = 1 \cdots ①$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{\alpha}{2}(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}) + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{\alpha}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA'}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (\text{ただし } \overrightarrow{\mathrm{OA'}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

ゆえに，①より，P は直線 A’B を描く．(右図)



【注】$(\alpha, \beta) = (2,0)$ & $(\alpha, \beta) = (0,1)$ の二つは，明らかに「$\alpha + 2\beta = 2$」をみたす．よって「2 点 A’と B を通る曲線」となることは厳密に正しいです．しかし「直線になることが証明できていない」ので「直線 A’B」とはできません．「$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$， $\alpha + 2\beta = 2$」をみたす点 P の集合が，直線を表すことを証明すれば，満点になります.

(2)

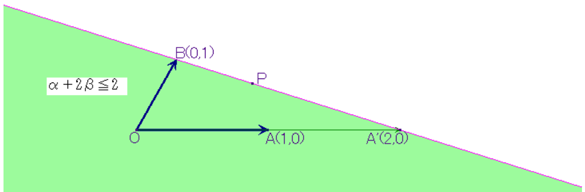
$$1 \leq \alpha + 2\beta \leq 2,\ \alpha \geq 0, \beta \geq 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta \geq 1 & \cdots ① \\ \alpha + 2\beta \leq 2 & \cdots ② \\ \alpha \geq 0, \beta \geq 0 & \cdots ③ \end{cases},$$

「$\alpha + 2\beta \leq 2$」の両辺を 2 で割ると，

$$\frac{\alpha}{2} + \beta \leq 1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{\alpha}{2}(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}) + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{\alpha}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA'}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (\text{ただし } \overrightarrow{\mathrm{OA'}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

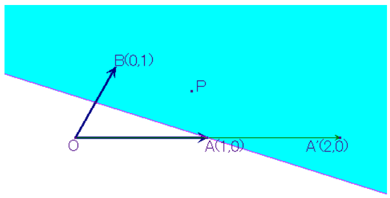
故に, ①より P は直線 A'B に関し原点と同じ側を動く.



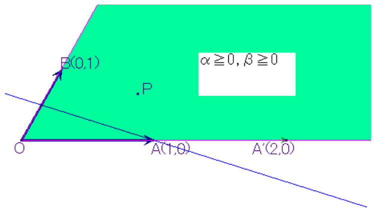
次に，「$\alpha + 2\beta \geq 1$」を使う.

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\beta\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\beta\overrightarrow{\mathrm{OB'}} \quad (\text{ただし } \overrightarrow{\mathrm{OB'}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

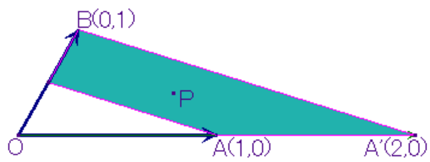
「$\alpha + 2\beta \geq 1$」だから，直線 AB'に関し原点と反対側の領域になる.



最後に「$\alpha \geq 0, \beta \geq 0$」は右図のようになる.



以上の共通部分をとると，右図のようになる.（答え）



[解 2]（斜交座標を使ったやり方）

斜交座標を使うと，答えはすぐ求まります．しかし，途中の経過が要求される場合はまずいでしょう．

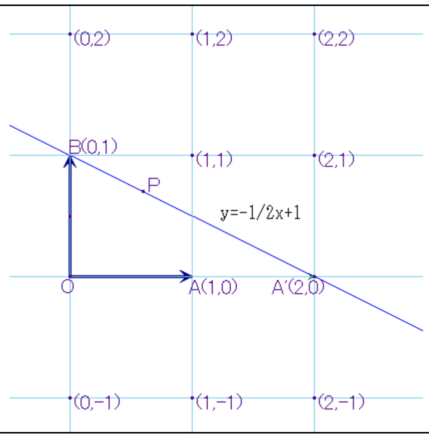
(1)「$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}\,(\alpha+2\beta=2)$」は，A(1,0)，　B(0,1)のときは，

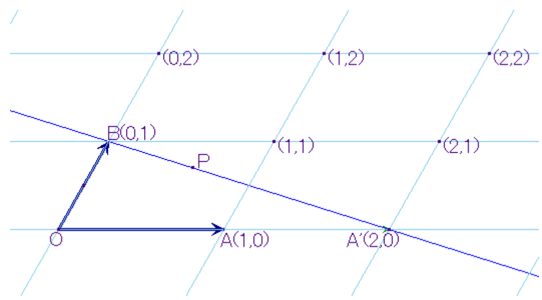
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$$

すなわち，「P の x 成分が α , y 成分が β 」となるので，　$\mathrm{P}(x,y)$ とおくと，

$$x+2y=2 \Longleftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+1$$

を表す．よって，右下図のような直線 A'B となる．



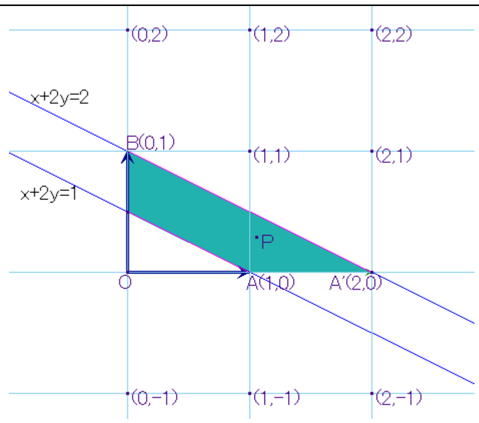


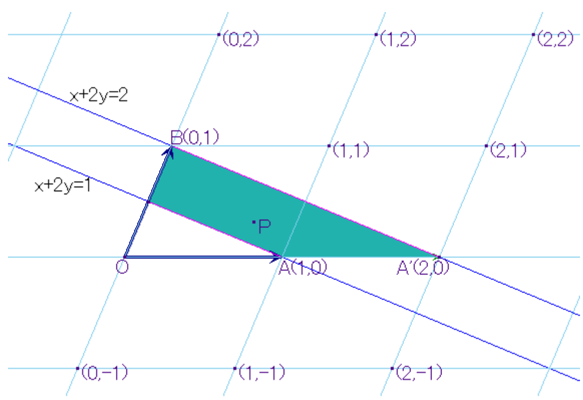
直交座標　　斜交座標

(2)　(1)と同様にして「$1\le\alpha+2\beta\le 2\,,\alpha\ge 0,\beta\ge 0$」は，直交座標では，

$$1\le x+2y\le 2,\quad x\ge 0, y\ge 0$$

を表します．（左下図）よって，斜交座標では，右下図のような領域になります．





直交座標　　斜交座標