3. 内分，外分の公式

3-1. 内分の公式

線分 AB を $m:n$ に 内分する点を P とすると，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}$$

[覚え方] A と n , B と m を組み合わせる．

ABをm:n→A B m n

ただし，O は原点である必要は無く，任意の点でよい．

普通の証明は，教科書を見てください．ここでは，相似を使って，図形的に説明します．

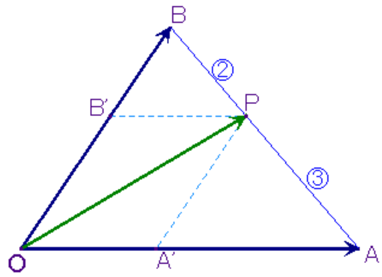
[例 1] P が線分 AB を 3:2 に内分する場合．

P を通り直線 OB と平行な直線と直線 OA の交点を A’，P を通り直線 OA と平行な直線と直線 OB の交点を B’ とすると，「A'P / /OB，　B'P / /OA 」だから，

$$\mathrm{OA'}:\mathrm{OA}=2:5,\quad \mathrm{OB'}:\mathrm{OB}=3:5$$

よって，

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}=\frac{2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{5}$$



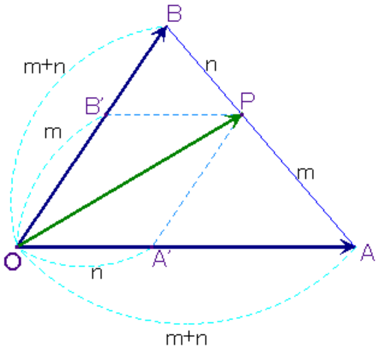
[注]ここで「$\frac{\vec{a}}{5}$」は 「$\frac{1}{5}\vec{a}$」の意味で，

$$\frac{2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{5}=\frac{1}{5}\cdot(2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB})=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}\leftarrow\boxed{\because k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}}$$

【内分の公式の証明】

[例 1]と同様にして，右図から

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}=\frac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}$$

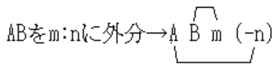


3-2. 外分の公式

線分 AB を $m:n$ に 外分する点を P とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{(-n)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+(-n)}$$

[覚え方] n を $(-n)$ に代えて，内分の公式と同様に，A と $(-n)$，B と m を組み合わせる．



ただし，O は原点である必要は無く，任意の点でよい．

【注】「$\dfrac{-\vec{a}}{-1}=(-1)(-\vec{a})=\vec{a}$」ですから，　「$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{(-n)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+(-n)}=\dfrac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(-m)\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{(-m)+n}$」としても同じです．

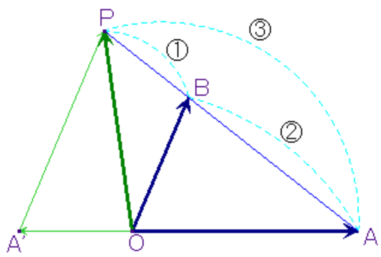
[例 2] P が線分 AB を 3:1 に内分する場合．

P を通り直線 OB と平行な直線と直線 OA の交点を A'とすると，
「$\mathrm{A'P}//\mathrm{OB}$」だから「$\triangle\mathrm{OAB}\backsim\triangle\mathrm{A'AP}$」．よって

$$\mathrm{OA'}:\mathrm{OA}=1:2,\quad \mathrm{A'P}:\mathrm{OB}=3:2$$

ゆえに，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{A'P}}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$$



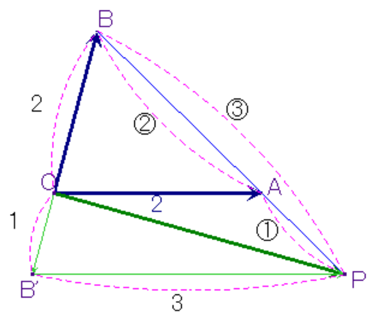
[例 3] P が線分 AB を 1:3 に内分する場合．

P を通り直線 OA と平行な直線と直線 OB の交点を B' とすると，
「$\mathrm{B'P}//\mathrm{OA}$」だから「$\triangle\mathrm{OAB}\backsim\triangle\mathrm{B'PB}$」．よって

$$\mathrm{B'P}:\mathrm{OA}=3:2,\quad \mathrm{OB'}:\mathrm{OB}=1:2$$

ゆえに，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}+\overrightarrow{\mathrm{B'P}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{3\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$$



[外分の公式の証明] 上の例と同様です.

$m > n$ のとき，左下図から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}'} + \overrightarrow{\mathrm{A'P}} = -\frac{n}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{-n\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m-n}$$

$m < n$ のとき，右下図から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}'} + \overrightarrow{\mathrm{B'P}} = \frac{n}{n-m}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{-m}{n-m}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (-m)\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{n-m}$$