ベクトルの和，差，実数倍

０．ベクトルの定義

ベクトルは，「長さ」と「方向」だけで表すことが出来るもので，例えば，力，風，速度などは全て**ベクトル**と考えることができます．しかしここでは**ベクトル**の例として「**移動**」を考えることにします．ただし「**移動**」の「始点」と「終点」だけを考え，途中でどのような経路をとったかは問題としないものとします．このとき「**移動**」は，「東向きに 10km の移動」のように「長さ」と「方向」だけを持つので**ベクトル**と見ることが出来ます．そして，「長さ」と「方向」が等しい「**移動**」は，全て等しい「**移動**」(=ベクトル）と考えることにします．（例えば「京都から東に 10km 移動すること」と，「東京から東に 10km 移動すること」は同じとします．しかし，「西に 10km 移動」と，「東に 10km 移動」は異なります．また，「東に 10km 移動」と，「東に 1km 移動」も異なります.）

普通，ベクトルは図の上では「矢印」で表します．式では，A を始点，B を終点とするベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，または単に $\vec{a}$ と書きます．例えば 四角形 ABCD がこの順で平行四辺形のとき， $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ ですが，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ です.

1. ベクトルの和，差，実数倍

1-1. 逆ベクトル

$\vec{a}$ と長さが同じで，向きが反対のベクトルを，$\vec{a}$ の**逆ベクトル**と言い，$-\vec{a}$ と表します．例えば，

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

1-2. 和

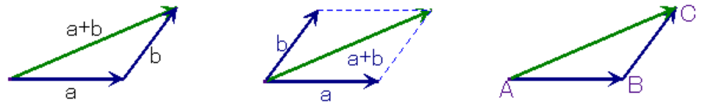
$\vec{a}$ の終点に $\vec{b}$ の始点を重ねたとき，「$\vec{a}$ の始点から $\vec{b}$ の終点までの**移動**」を，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**和**といい，$\vec{a}+\vec{b}$ で表します．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないときは，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の始点を重ねたとき出来る平行四辺形の対角線と重なります．即ち，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ (\text{定義})$$

です．また明らかに，

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}\ (\text{性質})$$

が成り立ちます.



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は

「(A から B への移動)+(B から C への移動)＝(A から C への移動)」

と理解すると簡単に覚えられます.

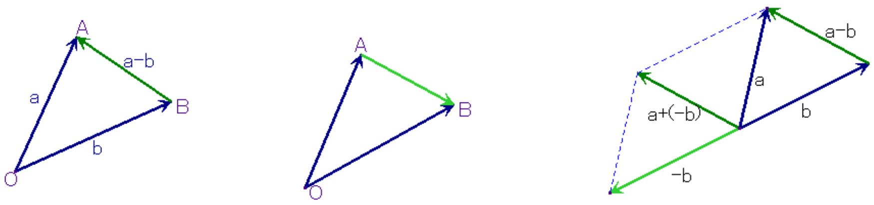
1-3. 差

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の始点を重ねて，その終点をそれぞれ A,B としたとき，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ で表されるベクトルを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の差といい $\vec{a}-\vec{b}$ で表します．すなわち

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}\ \text{（定義）}$$

このように定義すると，「$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$」が成り立つので，実数の計算法則「$b+(a-b)=a$」と同じ規則が成り立ちます．(ベクトルの差をこのように定めた理由です).

また右下図より　$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(\overrightarrow{-b})$ も成り立つことがわかります.



ベクトルの差は「**始点変更の公式**」（本当は公式ではなく，定義）としても良く使われます．中央上図より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

これにより，A から，任意の点 O に始点を変更したことになる.「終ろー前」と覚えるか,

$$(\text{A から B への移動})=(\text{A から O への移動})+(\text{O から B への移動})=(-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

と理解するのも良いです.

1-4 実数倍

$\vec{a} \neq \vec{0}, k > 0$ のとき

$$\begin{cases} \vec{a} \text{ と同じ向きで，長さが}k\text{倍のベクトルを } k\,\vec{a}, & \cdots\text{正の実数倍} \\ \vec{a} \text{ と反対向きで，長さが}k\text{倍のベクトルを } (-k)\,\vec{a} & \cdots\text{負の実数倍} \end{cases}$$

とします．($\vec{a} = \vec{0}$ または $k = 0$ のときは，$k\vec{a} = \vec{0}$ と定めます)．さらに，「$(-k)\vec{a} = -k\vec{a}$」と省略して書くことにします．(このように書いても，定義より「$(-1)\,\vec{a}$」は逆ベクトル「$-\vec{a}$」と一致するので矛盾しません．)

このように定めると 下図から

$$\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} = 3\vec{a}\,,\ 2\vec{a}+\vec{a}=3\vec{a}\,,\ (-\vec{a}) + (-\vec{a}) + (-\vec{a}) = -3\vec{a}\,, -2\vec{a} + (-\vec{a}) = -3\vec{a}$$

などが成り立つことが分かります．(ベクトルの和，差は既に定義されているので二つの定義を比べることが出来ます．)

ベクトルの実数倍に関し，

$$\begin{cases} s\vec{a} + t\vec{a} = (s+t)\vec{a} \\ s(t\vec{a}) = st\,\vec{a} \end{cases} \quad (s, t \text{ は任意の実数})$$

が成り立ちます．(例えば $2\vec{a}+\vec{a}=3\vec{a}$，$2(3\vec{a}) = 6\vec{a}$ など) これは，s, t の符号で場合分けすればすぐ証明できるますが，実に当たり前であることが，例を描けばすぐ理解できます．

1-4-1 CabriⅡによる検証．

「$s\vec{a} + t\vec{a} = (s+t)\vec{a}$」を検証してみます．リンクをクリックして

「$s\overline{\mathrm{OE}} + t\overline{\mathrm{OE}} = (s+t)\overline{\mathrm{OE}}$」となっていることを, 確かめてください. 本当に当たり前のことでしょう？

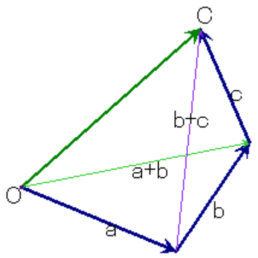
kOA+mOA=(k+m)OA.html

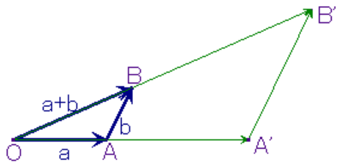
1-5 ベクトルの計算法則

ベクトルの計算法則をまとめます.

$$\begin{cases} \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \quad (\text{交換法則}) \\ (s+t)\vec{a}=s\vec{a}+t\vec{a} \\ s(t\vec{a})=st\,\vec{a} \\ (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \quad (\text{結合法則}) \\ k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b} \quad (\text{三角形の相似}) \end{cases}$$

上の 3 つは既に述べました. 結合法則は左下図で,「$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$」も「$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$」もともに $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と一致することから, 証明できます.





「$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$」は, 三角形の相似を使って証明できます. 右上図で「$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{A'B'}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$」が成り立つとき,「$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$」も成り立つということです.

1-5-1 CabriⅡによる検証.

CabriⅡによって上の二つのことを検証してみましょう. まずは**結合法則**からです.

combination.html

次は,「$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ （三角形の相似)」です.

k(a+b)=ka+kb.html

1-6 ベクトルの分解（の一意性）

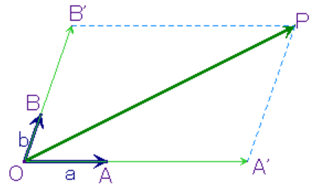
平面上に互いに平行でなく，かつ$\vec{0}$でもない二つのベクトル$\vec{a}$と$\vec{b}$があるとき（このような時，$\vec{a}$と$\vec{b}$は**一次独立**と言います），平面上の任意の点 P に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad (s, t\text{は実数})$$

の形に一通りに表せます．これは P を通り直線 OB に平行な直線と直線 OA の交点を A’, P を通り直線 OA に平行な直線と直線 OB の交点を B’とするとき，「$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$」と一通りに書け，かつ「$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA'}} + \overrightarrow{\mathrm{OB'}}$」となることから分かります．実は，

この(s,t)の組は，A(1,0), B(0,1)としたときの座標のようなもの

ですが，これは後述します．



1-6-1 CabriⅡによる検証

P を動かして，いつでも 「$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$」と表せることを確認してください．
OP=sOA+tOB.html