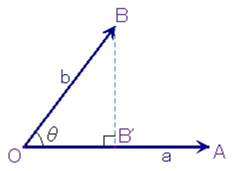
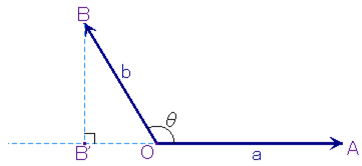
３．内積と成分

3-1. 一方のベクトルが座標軸上にある時

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を $\theta\,(0°\le\theta\le 180°)$， B から直線 OA に下ろした垂線の足を B’とします．このとき，第一節から，



0° ≦θ≦90° のとき
a・b=OA*OB*cosθ=OA*OB'

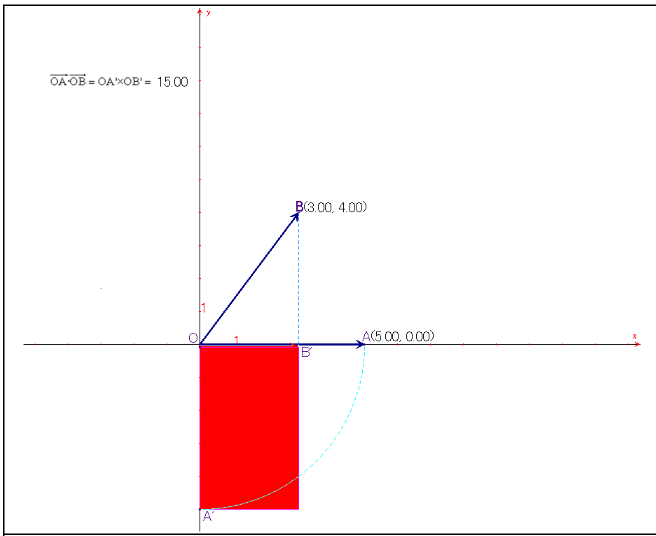
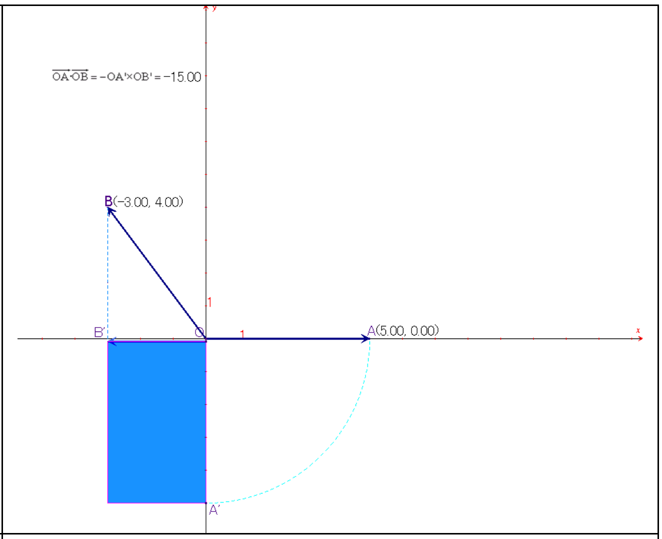


90° <θ≦180° のとき
a・b=OA*OB*cosθ=OA*(−OB')=−OA*OB'

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 方向に x 軸を取り，A,B の座標が $\mathrm{A}(a_1,0)$, $\mathrm{B}(b_1,b_2)$ とすると，

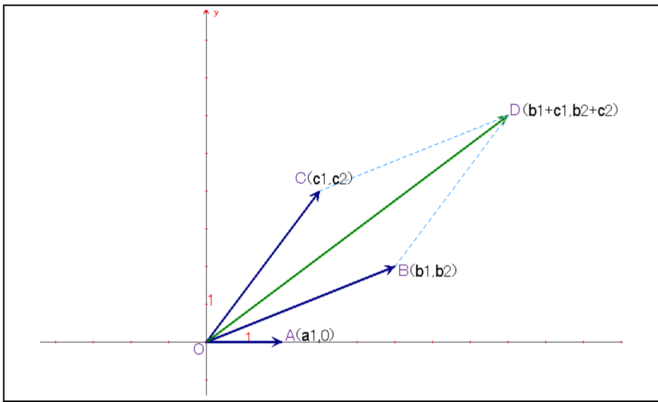
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{cases}\mathrm{OA}\times\mathrm{OB'}=a_1b_1 & (0°\le\theta\le 90°\text{のとき})\\ \mathrm{OA}\times(-\mathrm{OB'})=a_1b_1 & (90°<\theta\le 180°\text{のとき})\end{cases}.$$

すなわち，常に「$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1$」が成り立つ．$\cdots$(*)

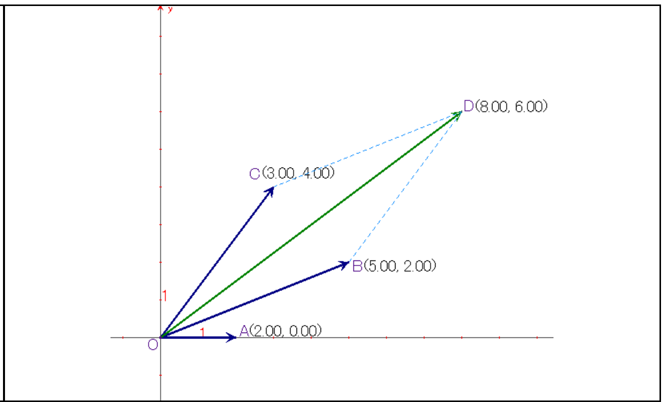
	
$0°\le\theta\le 90°$のとき	$90°<\theta\le 180°$のとき

3-1-1. 内積の分配法則の「スッキリした」証明

(*)を使うと，内積の分配法則の証明も綺麗にできます．$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}, \vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 方向に x 軸を取り，A,B,C の座標が $\mathrm{A}(a_1,0), \mathrm{B}(b_1,b_2), \mathrm{C}(c_1,c_2)$ とすると，$\mathrm{D}(b_1+c_1, b_2+c_2)$．



[一般]



[例]

よって，(*)より，

$$\begin{cases} \vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1 \\ \vec{a}\cdot\vec{c}=a_1c_1 \\ \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=a_1(b_1+c_1) \end{cases}$$

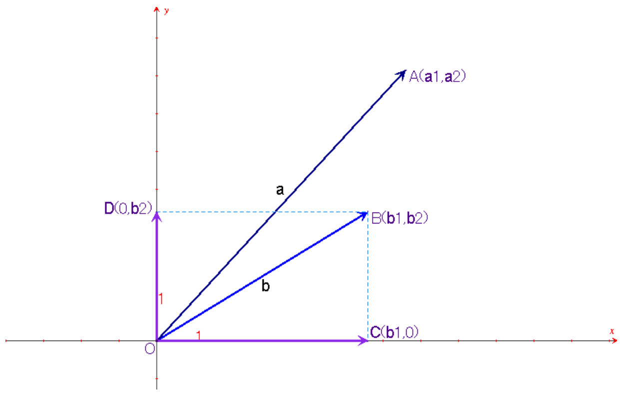
ゆえに，「$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$」が成り立ちます．そして，$x$ 軸のとり方は自由だから，常に「$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$」が成り立ちます．

3-2. 一般の場合

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, A,B の座標を $\mathrm{A}(a_1,a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,b_2)$. $\mathrm{C}(b_1,0)$, $\mathrm{D}(0,b_2)$ とすると,「$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$」.

ゆえに，**分配法則:**「$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$」より，（下図で直線 OA を「スクリーン」と考えて）

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}})=\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} \cdots ①$$



ところが $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は， x 軸上のベクトルだから,「3-1 節 (*)」より，（x 軸を「スクリーン」と考えて）

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=a_1b_1.$$

同様に $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ は， y 軸上のベクトルだから，（y 軸を「スクリーン」と考えて）

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=a_2b_2$$

ゆえに①から,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

すなわち,

$$\boxed{\begin{array}{c}\vec{a}=(a_1,a_2),\ \ \vec{b}=(b_1,b_2)\ \text{のとき,}\\ \vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2\end{array}}$$

3-2-1 CabriⅡによる検証

点 A,点 B を drag してください.　　　　coordintates.html