2.内積の分配法則

$$\boxed{\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}}$$

【注】普通，日本の教科書では，余弦定理を用いて，内積の成分表示「$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$」を導き，これを利用して，上の分配法則を導きます．しかし，分配法則は正射影を用いても証明できるので，ここでは図形的に証明してみます．（例えば　香港の高校の教科書では，正射影を用いて証明しているものがあります．）

2-1.正射影を使った図形的証明

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，さらに B,C から直線 OA に下ろした垂線の足を B’,C’とします.

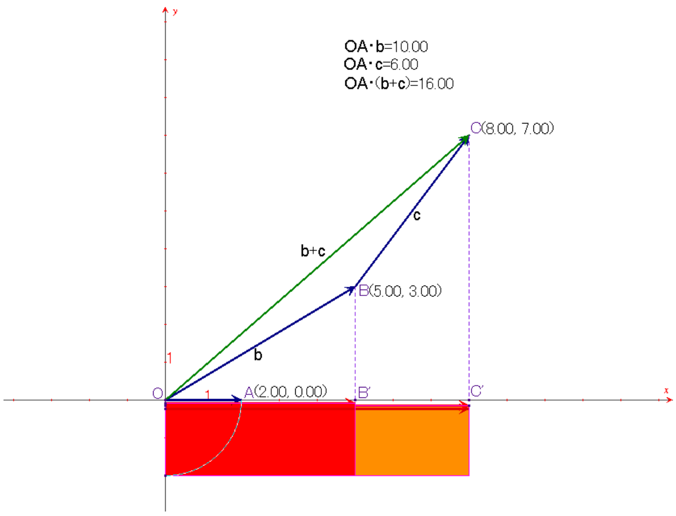
(i) $\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$, $\overrightarrow{\mathrm{B'C'}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と同じ方向を向いているとき.
内積の図形的意味から，

「$\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathrm{OA}\times\mathrm{OB'}$,　$\vec{a}\cdot\vec{c}=\mathrm{OA}\times\mathrm{B'C'}$,　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\mathrm{OA}\times\mathrm{OC'}$」

ところが「$\mathrm{OB'+B'C'=OC'}$」だから，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=\mathrm{OA}\times\mathrm{OB'}+\mathrm{OA}\times\mathrm{B'C'}=\mathrm{OA}\times(\mathrm{OB'}+\mathrm{B'C'})=\mathrm{OA}\times\mathrm{OC'}=\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$$

[注]下図の二つの「正の符号付面積」の和が，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と等しくなります.



(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OB'}}, \overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と同じ方向，$\overrightarrow{\mathrm{B'C'}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と反対方向を向いているとき

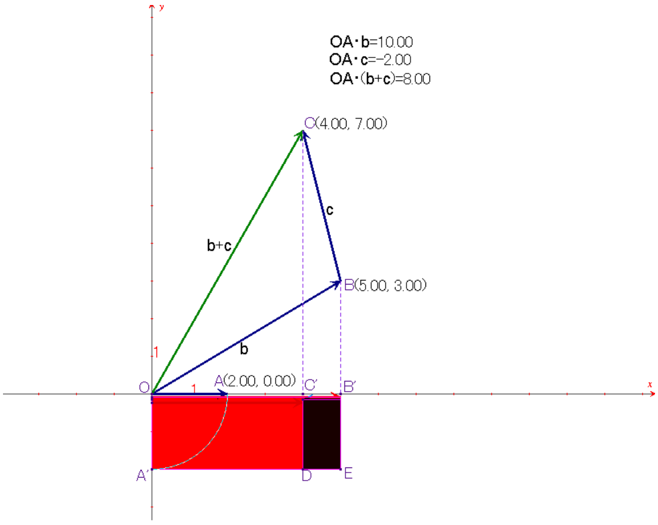
内積の図形的意味から，

$$「\vec{a}\cdot\vec{b} = \mathrm{OA}\times\mathrm{OB'}, \quad \vec{a}\cdot\vec{c} = \mathrm{OA}\times(-\mathrm{B'C'}), \quad \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \mathrm{OA}\times\mathrm{OC'}」$$

ところが「$\mathrm{OB'}-\mathrm{B'C'}=\mathrm{OC'}$」だから，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} = \mathrm{OA}\times\mathrm{OB'}+\mathrm{OA}\times(-\mathrm{B'C'}) = \mathrm{OA}\times(\mathrm{OB'}-\mathrm{B'C'}) = \mathrm{OA}\times\mathrm{OC'} = \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$$

[注]「(長方形 OA’EB’の面積)－(長方形 C’DEB’の面積)＝(長方形 OA’DC’の面積)」を表します．下図で，黒くなった部分は，「正の符号付面積」と「負の符号付面積」が打ち消しあったことを表します．



その他の場合も，同様にして成り立つことが証明されます．（略）

2-2. CabriⅡによる検証.

A,B,C を Drag してみてください．　　distribution_law.html