

I-1 xy 平面の n 個の点 $(\cos \frac{2\pi k}{n}, \sin \frac{2\pi k}{n})$ $k = 1, 2, \dots, n$ を頂点とする正 n 角形の周および内部を D_n とする。このとき、 $D_3, D_4, D_5, D_6, \dots$ の共通部分の面積を求めよ。

I-2 x の 5 次式 $f(x)$ のグラフ $C: y = f(x)$ が平行な 2 直線 L, M のそれぞれと 2 点で接しているような C, L, M の実例を 1 つ見つけよ。また、その例について、 C と L の交点と 2 つの接点との 3 点により L から切り取られる 2 つの線分の長さの比を求めよ。

II-1 放物線 $y = x^2$ の右から原点に近づく点列 $A_n(a_n, a_n^2)$ ($n = 1, 2, \dots$) と、 x 軸上の右から原点に近づく点列 $B_n(b_n, 0)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) があって、 $\triangle A_n B_n B_{n-1}$ はすべての $n = 1, 2, \dots$ に対し正三角形をなしており、 $a_1 = 1$ であるとき、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad \text{および} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$$

を求めよ。

II-2 xyz 空間内の 3 つの部分集合:

$$A = \{(x, y, z) \mid |x| \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1\}$$

$$B = \{(x, y, z) \mid |y| \leq 1, x^2 + z^2 \leq 1\}$$

$$C = \{(x, y, z) \mid |z| \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

の和集合 $A \cup B \cup C$ の体積を求めよ。