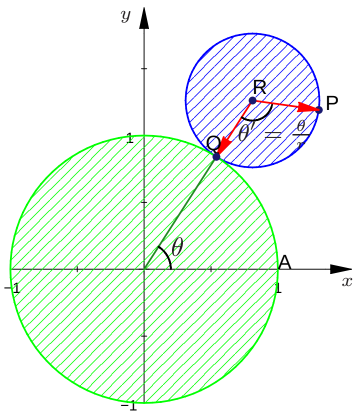
［問 II-2］半径 R の定円 C がある．半径 r の円板 D が，円 C に外接しながら一定の速さですべることなく転がっている．円板 D の周上の一点を P とするとき，P の速度ベクトルが $\overrightarrow{0}$ となる場所が有限個であるための必要十分条件を求めよ．

原点を中心とする $\frac{1}{R}$ 倍の相似変換によって P が P′ に移るとする．

$$「\text{P の速度ベクトルが}\overrightarrow{0}」\Longleftrightarrow「\text{P}'\text{の速度ベクトルが}\overrightarrow{0}」$$

であり，かつこの変換によって，円 C は半径 1 の円に，円板 D は，半径 $\frac{r}{R}$ の円板に移るから，最初から，円 C の半径を 1，円板 D の半径を r として考えてよい.（最後に r に関する条件を $\frac{r}{R}$ の条件に変えればよい.）また 円板 D の中心を R，D と C の接点を Q， Q の回転角を $\theta(t)$(t は時間) とする．ここで 「P は初めに A にあり, $\theta = t$（「D の滑る速さを 1」)」としても，一般性を失わない．



弧 AQ の長さと弧 PQ の長さが等しいから,「 $\angle\text{QRP} = \theta'$」とすると,

$$1 \cdot \theta = r \cdot \theta' \Longleftrightarrow \theta' = \frac{\theta}{r}$$

$\overrightarrow{\text{RQ}}$ の x 軸正方向からの回転角は「$\pi + \theta$」だから，$\overrightarrow{\text{RP}}$ の x 軸正方向からの回転角は,

$$(\pi + \theta) + \theta' = \pi + \left(1 + \frac{1}{r}\right)\theta$$

したがって,

$$\overrightarrow{\text{OP}} = \overrightarrow{\text{OR}} + \overrightarrow{\text{RP}} = (1+r)\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}\cos\left(\pi + \left(1+\frac{1}{r}\right)\theta\right) \\ \sin\left(\pi + \left(1+\frac{1}{r}\right)\theta\right)\end{pmatrix} = (1+r)\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix} - r\begin{pmatrix}\cos\left(1+\frac{1}{r}\right)\theta \\ \sin\left(1+\frac{1}{r}\right)\theta\end{pmatrix}$$

ゆえに，P の速度ベクトルを $\overrightarrow{v}$ とすると,

$$\overrightarrow{v} = (1+r)\begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix} - r\left(1 + \frac{1}{r}\right)\begin{pmatrix}-\sin\left(1+\frac{1}{r}\right)\theta \\ \cos\left(1+\frac{1}{r}\right)\theta\end{pmatrix} = (1+r)\begin{pmatrix}-\sin\theta + \sin\left(1+\frac{1}{r}\right)\theta \\ \cos\theta - \cos\left(1+\frac{1}{r}\right)\theta\end{pmatrix} \quad \cdots①$$

これを，和積の公式を使って変形すると,

$$\overrightarrow{v} = (1+r)\begin{pmatrix}2\sin\frac{\theta}{2r}\cdot\cos\left(1+\frac{1}{2r}\right)\theta \\ 2\sin\frac{\theta}{2r}\cdot\sin\left(1+\frac{1}{2r}\right)\theta\end{pmatrix} = 2(1+r)\cdot\sin\frac{\theta}{2r}\begin{pmatrix}\cos\left(1+\frac{1}{2r}\right)\theta \\ \sin\left(1+\frac{1}{2r}\right)\theta\end{pmatrix} \quad \cdots①'$$

ゆえに,「$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$」となる**必要十分条件**は,

$$\sin\frac{\theta}{2r}=0 \Longleftrightarrow \frac{\theta}{2r}=m\pi \Longleftrightarrow \theta=2mr\pi \quad (\text{但し } m \text{ は整数}) \qquad \cdots ②$$

一方 このとき,① 及び $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の式 より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \qquad \cdots ③$$

注1) ところが,整数 m は無数にある.よって ② を満たす P が有限個の時,ある整数 i,j $(i \neq j)$ に対し,

$$2ir\pi-2jr\pi=2k\pi \Longleftrightarrow (i-j)r=k \Longleftrightarrow r=\frac{k}{i-j} \ (k \text{ は整数})$$

が成り立つことが必要.すなわち, **r が有理数となることが必要.**

逆に, r が有理数の時,$r=\frac{k}{i}$ $(i,k$ は互いに素な整数) とおけて,

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \theta=2m\cdot\frac{k}{i}\pi \ (\text{但し}, m \text{ は整数})$$

m は無数にあり, θ も無数にある.ところが

$$2(m+i)\cdot\frac{k}{i}\pi-2m\cdot\frac{k}{i}\pi=2\pi k$$

であるから,m が $(m+i)$ に変わっても,それに対する P の位置は変わらない.すなわち,異なる P の個数は,高々 $m=0,1,2,\cdots,(i-1)$ に対応する i 個.

ゆえに,「$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$」となる P の個数が有限個になるための必要十分条件は,

$$\frac{r}{R} \text{ が有理数となること.}$$

[参考] 以下に,MuPAD で描いた,いろいろな r に対する点 P の軌跡のビデオを示す.クリックしてください.「$\overrightarrow{v}$注2) $=\overrightarrow{0}$」が成り立つのは,「P が円 C 上に来る時」と分かる.これが「$\theta=2\pi r\cdot m\cdots$②」の図形的意味となる.(直感的に明らかであるが,証明なしに使ってよいかは疑問.) 注3)

(1) $R=1, r=\frac{1}{2}$ のときは, ここ をクリック.(このとき,$\theta=\pi$ 毎に $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$.)

(2) $R=1, r=\frac{2}{3}$ のときは, ここ をクリック.(このとき,$\theta=\frac{4}{3}\pi$ 毎に $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$.)

(3) $R=1, r=2$ のときは, ここ をクリック.(このとき,$\theta=4\pi$ 毎に $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$.)

(4) $R=1, r=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のときは, ここ をクリック.(このとき,$\theta=\sqrt{2}\pi$ 毎に $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$.)

注1) すなわち $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$ のとき,P は単位円上にあり P=Q となる.これは直感的には 明らかです.

注2) 速度ベクトル $\overrightarrow{v}$ は 赤色の矢印で表してあるが,最大速度の時に $|\overrightarrow{v}|=1$ となるようにしてある.

注3) 個人的には,「証明なしに使ってよい」と思うし,そういう答案を見ると嬉しくもなるのだが,実際には,計算して証明しないといけないでしょう.というのは,厳密な解答が**適度な計算でもって**与えることができ,かつ「その計算抜きだと 解答が簡単すぎる」からである.一方,[II–1] で「$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$」 を証明抜きに使ったが,こちらは証明が難しいので,省略しても大丈夫 でしょう.試験と言うのは「出題者の意図を読む」ことであり,数学とは別の力も必要です.