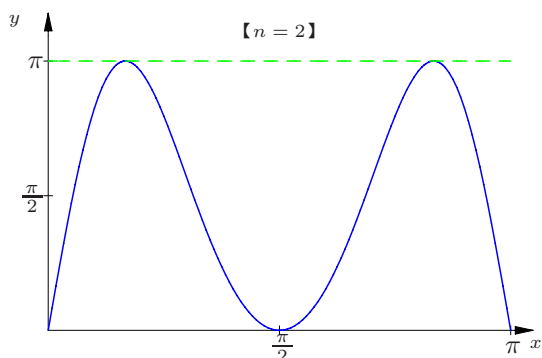
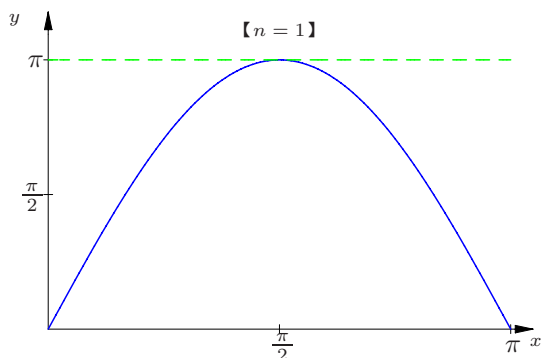


[問I-1] $f_1(x) = \pi \sin x$ とし, $n = 2, 3, 4, \dots$ に対して, $f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$ で関数の列 $f_2(x), f_3(x), f_4(x), \dots$ を定める. このとき, 区間 $0 < x < \pi$ において $f_n(x)$ が極値をとるような x の個数を n で表せ.



上のグラフの例から, 次の命題を証明すればよいことが分かる.

命題 P(n): 「 $f_n(0) = f_n(\pi) = 0$. かつ $f'_n(x) = 0$ ($0 < x < \pi$) をみたす x の値を $x = a_i$ ($a_1 < a_2 < \dots < a_n$) とすると, $f_n(x)$ は a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) で極値 0 または π をとる」

【証明】(数学的帰納法による)

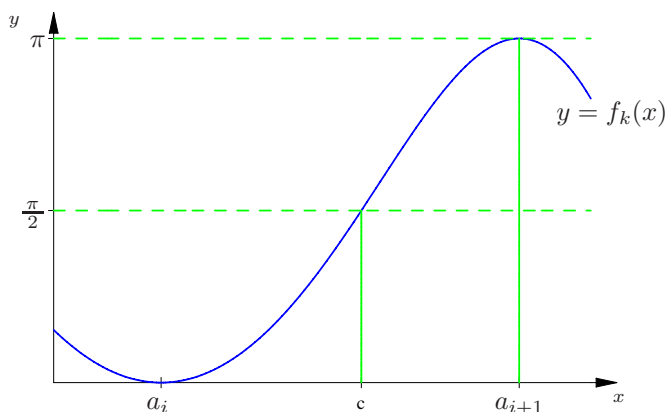
(i) $n = 1$ のとき, 正しい.

(ii) $n = k$ のとき, 正しいとすると,

$$\begin{cases} f_k(0) = f_k(\pi) = 0 & \dots \textcircled{1} \\ f'(\alpha) = 0 \text{ ならば } f(\alpha) = 0 \text{ または } f(\alpha) = \pi \text{ である} & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

① より,

$$f_{k+1}(0) = \pi \sin f_k(0) = \pi \sin 0 = 0, \quad f_{k+1}(\pi) = \pi \sin f_k(\pi) = \pi \sin \pi = 0$$



② より, ある i ($1 \leq i \leq n-1$) のとき, 「 $a_i < x < a_{i+1}$ で $f_k'(x) > 0$ 」 とすると,

$$f_k'(a_i) = f_k'(a_{i+1}) = 0, f_k(a_i) = 0, f_k(a_{i+1}) = \pi \cdots \textcircled{3}$$

$f_{k+1}(x) = \pi \cdot f_1(f_k(x)) = \pi \sin(f_k(x))$ だから,

$$f_{k+1}'(x) = \pi \cos(f_k(x)) f_k'(x)$$

「 $a_i < x < a_{i+1}$ では, $f_k'(x) > 0$ 」 だから, $f_{k+1}'(x)$ の符号は, $\cos(f_k(x))$ の符号と一致する.

また, $f_k(x) = \frac{\pi}{2}$ となる x ($a_i < x < a_{i+1}$) は, ただ 1 つ存在する. これを $x = c$ とおくと,

$$f_{k+1}(c) = \pi \sin f_k(c) = \pi \sin \frac{\pi}{2} = \pi \text{ かつ } f_{k+1}'(c) = \pi \cos(f_k(c)) f_k'(c) = \pi \cos \frac{\pi}{2} \cdot f_k'(c) = 0$$

さらに, $i = 2$ のときは, 「 $a_{i-1} < x < a_i$ で $f'(x) < 0$ 」 となるので, 同様にして, $a_i < x < a_{i+2}$ に於ける増減表は次のようになる. (但し, $f_k(b) = f_k(c) = \frac{\pi}{2}$ とする)

x	a_{i-1}	\cdots	b	\cdots	a_i	\cdots	c	\cdots	a_{i+1}
$f_{k+1}'(x)$	0	+	0	-	0	+	0	-	0
$f_{k+1}(x)$	0	\nearrow	π	\searrow	0	\nearrow	π	\searrow	0

よって, 確かに $x = a_i$ で「極値 0」をとる ($i = 1$ のときは, $a_{i-1} = 0$, $i = n$ のときは, $a_{i+1} = \pi$ とし, 同様に考えると良い.) さらに, 「 $a_i < x < a_{i+1}$ で $f_k'(x) > 0$ 」 のときも, 同様にして「 $x = a_i$ で極値 π をとる」ことが言えるから, $n = k + 1$ のときも, 命題 P は成り立つ.

(i),(ii) より, 命題 P は全ての自然数に関し正しいことが証明された. また, 上の (ii) より,

$f_{k+1}(x)$ は, 「 $0 < x < a_1$ 」, 「 $x = a_1$ 」, 「 $a_1 < x < a_2$ 」, 「 $x = a_2$ 」, \cdots , 「 $x = a_k$ 」, 「 $a_k < x < \pi$ 」の各区間 (または各点) で 一個ずつ極値を取るので,

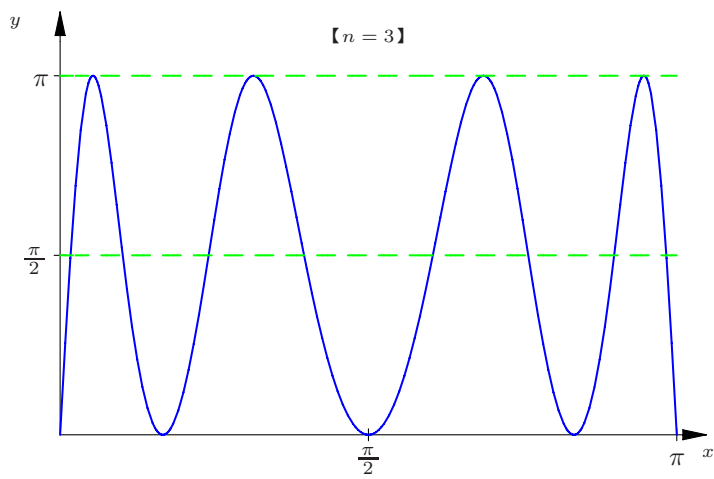
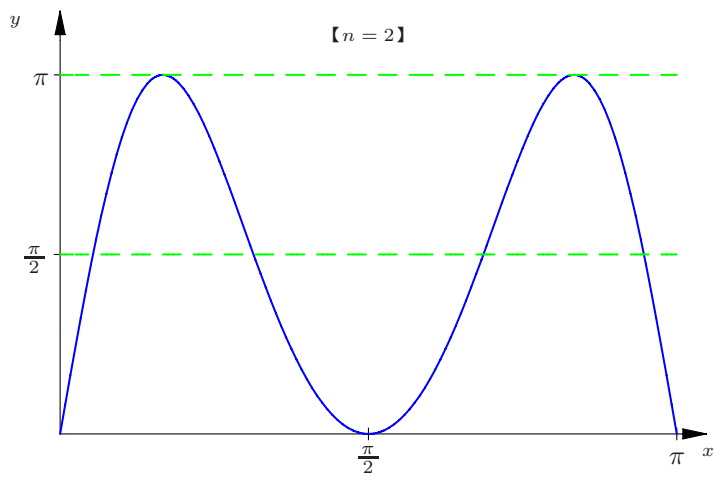
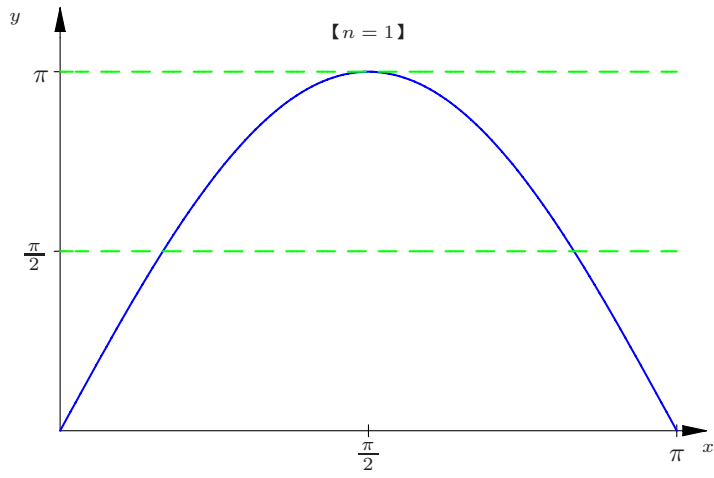
$$a_{k+1} = a_k + (a_k + 1) = 2a_k + 1 \quad (k = 1, 2, 3, \cdots) \cdots \textcircled{4}$$

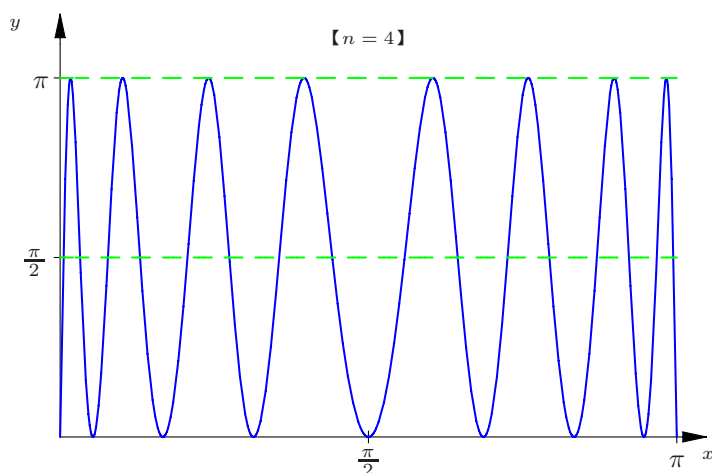
$a_1 = 1$ だから, ④ より, $a_n = 2^n - 1$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$)

ゆえに求める個数は,

$$(2^n - 1) \text{ 個}$$

「参考1」様々な n に対する $y = f_n(x)$ のグラフです (by [MuPAD](#))



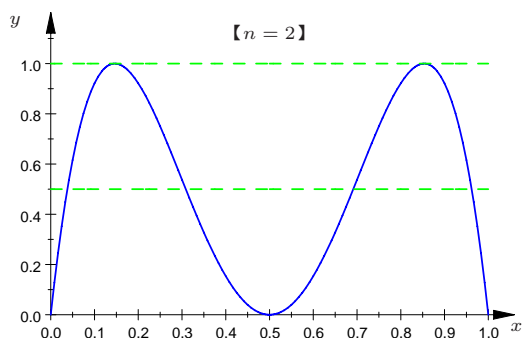
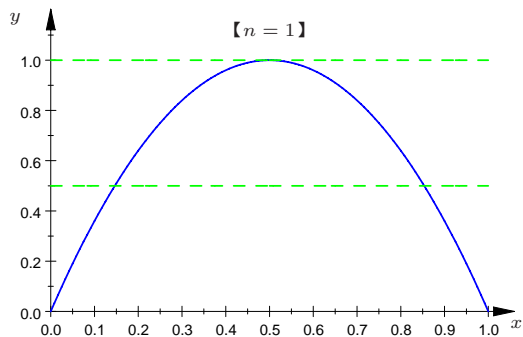


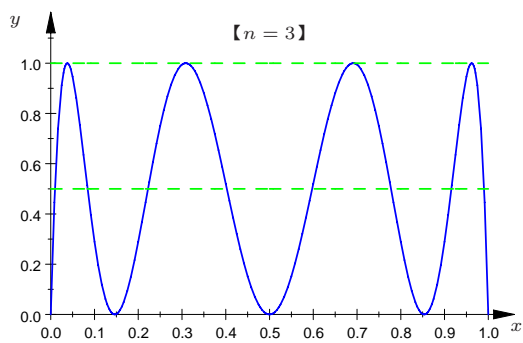
さらに、ビデオは [ここ](#) にあります。

「参考 2-1」 $f_1(x)$ の特質は、定義域と値域が等しく、かつ「山が1つ」となっていることです。このとき、「 $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$ 」により、 $y = f_n(x)$ の1つの山に対して、二つの山が作られます。すなわち、命題 P の性質は 様々な関数に関しても成り立ちます。例えば、

$$f_1(x) = 4x(1-x), \quad f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x)) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

に関しても成り立ちます。下のグラフを見てください。





「参考 2-2」今度は，

$$f_1(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ 2-2x & (\frac{1}{2} \leq x < 1) \end{cases}$$

です．このように，微分可能でなくとも成り立ちます．

