

Steiner の定理

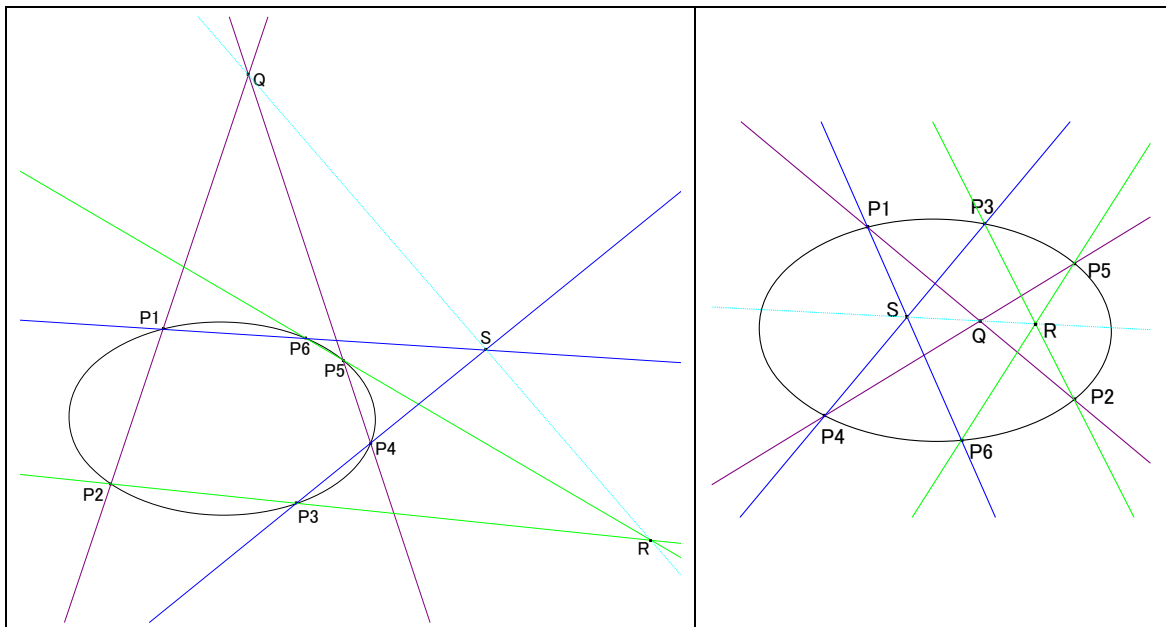
ここで 2 次曲線といているのは、高校の数学における 2 次曲線で、楕円、双曲線、放物線です。また、記述を簡単にするため、「直線 l と直線 m の交点を $l \cdot m$ 」と表します。

0. パスカルの定理

二次曲線 K 上に任意の 6 点 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ をとり、直線 P_1P_2 と直線 P_4P_5 の交点を Q 、直線 P_2P_3 と直線 P_5P_6 の交点を R 、直線 P_3P_4 と直線 P_6P_1 の交点を S とすると、 Q, R, S は同一直線上にある。即ち、二次曲線に内接する 6 角形の「対辺の交点」は、同一直線上にある。逆に、曲線 C に内接する任意の 6 角形の「対辺の交点」が同一直線上にあるなら、 C は 2 次曲線である。

【注】正 6 角形るとき、 P, Q, R は全て無限遠点となり、直線 PQR は無限遠直線となります。この場合も「 P, Q, R は同一直線上にある」と約束します。すなわち「無限遠点を集めた直線（無限遠直線）」も直線と考えます。

証明 は、例えば、G.ジェンクス著「幾何再入門」をご覧ください。下図はその 1 例です。いずれの場合も Q, R, S は同一直線上にあります。



pascal.ggb

以下の説明は、郡 敏昭著「射影平面の幾何学」を参考にしました。ただこの本は非常に厳密に書かれているので、ここでは大幅に簡略化しています。

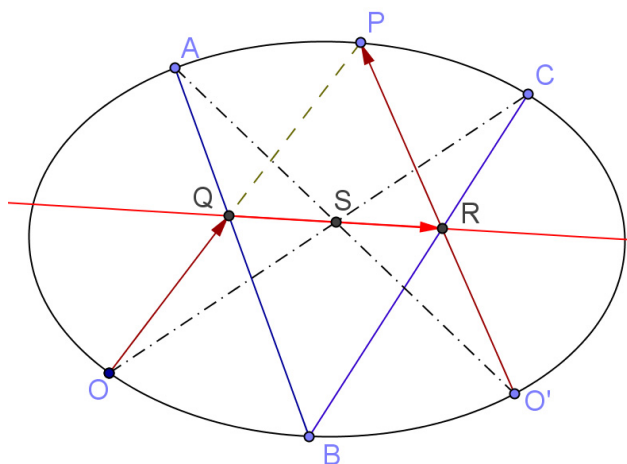
1. Steiner の定理

2 次曲線 K 上に任意の 2 定点 O, O' を取り、 P を K 上の動点とする。このとき、直線 OP を直線 $O'P$ に移す射影変換 π が存在する。

【証明】 K 上に定点 A, B, C をとります。この時 $S = OC \cdot O'A$ も定点です。 $Q = BA \cdot OP$ と $R = BC \cdot O'P$ は動点ですが、Pascal の定理より、 Q, R, S は一直線上にあります。直線 BA, BC は定直線なので、 AB による切断と点 S, O' からの射影を考えて、

$$OP \bar{\wedge} Q \bar{\wedge} R \bar{\wedge} O'P$$

この対応を π とすれば、 π は射影変換で、 $\pi(OP) = O'P$ **【証明終】**



[Steiner.ggb](#)

2. Steiner の定理の逆

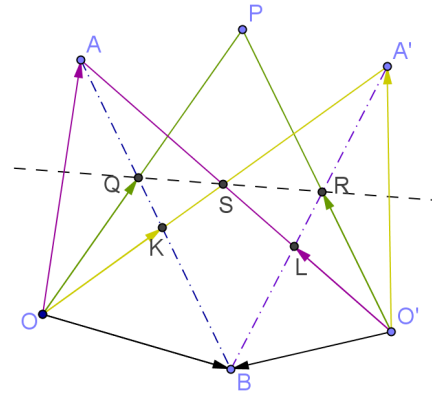
O, O' を曲線 K 上の定点, P を K 上の任意の点とする. 直線 OP を直線 $O'P$ に移す射影変換 π が存在すれば, K は 2 次曲線となる.

【証明】 定点を通る直線群を pencil と呼んで, 点 X を通る pencil を $P(X)$ と書きます.

[Part1] K 上に定点 A, B, A' を取ります. 仮定より,

$$\pi(OP)=O'P, \pi(OA)=O'A, \pi(OB)=O'B, \pi(OA')=O'A'$$

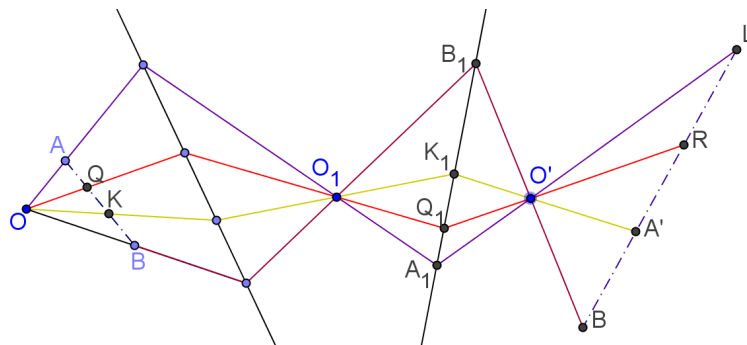
直線 BA による OA, OP, OA', OB の切断と,
直線 BC による $O'A, O'P, O'A', O'B$ の切断を考え,
 $Q=AB \cdot OP, K=AB \cdot OA', R=BA' \cdot O'P, L=BA' \cdot O'A$
とします.



[steiner converse1.ggb](#)

$P(O)$ と $P(O')$ の間に射影対応 π がある時, これらの pencil を 2 直線で切断してできる点列と点列の間にも射影対応が出来ます. 例えば $P(O)$ と $P(O')$ の間に 下図のような対応があるとします. $(OA \bar{\bar{O}}_1 A_1 \bar{\bar{O}}_1 O'A_1)$.

この時, これらの pencil を切断して出来る直線 AB 上の 4 点 A, Q, K, B と, 直線 BL 上の 4 点 L, R, A', B は射影的に対応しています. $(AQKB \bar{\bar{L}} R A' B)$.

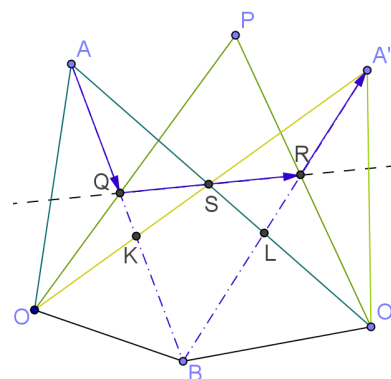


この射影は直線 BA と BL の交点 B を動かさないで, ある配景写像 σ で置き換えられます. 即ち, 直線 AB 上の点列は直線 BL 上の点列に ある中心から「一発で」射影されます. そして, σ の中心は $S = OC \cdot O'A$ です. **ゆえに, Q, S, R は一直線上に並びます.** 即ち, K 上の 6 点が O と O' を含むときは Pascal の定理と同様の性質が成り立ちます.

[Part2] 以上は O, O', A, A', B が定点で, P が動点でした.
 次に O, O', A, A', P が定点, B を動点とします. この時も,
 Q, S, R は B の位置によらず一直線に並びます.
 故に S を中心とする直線 OP から $O'P$ への射影により
 $P(A)$ と $P(A')$ の間に対応が出来ます. すなわち,

$$AQ \bar{\wedge} Q \bar{\wedge} R \bar{\wedge} A'R$$

この射影を ω とすると, 曲線 K 上の任意の点 B に対し
 直線 AB を直線 $A'B$ に移す射影変換 ω が存在します.



[steiner converse2.ggb](#)

ゆえに「 A, A' と ω の関係」と「 O, O' と π の関係」は全く
 同じです. したがって O と O' は特別な点ではなく, K
 上の任意の2点 A, A' に置き換えることが出来ます.

この A, A' に関して, **[Part1]** と同様の議論をすると,
 K 上の任意の6点に対し, Q, S, R は一直線となり, Pascal
 の定理が成り立ちます. **【証明終】**

