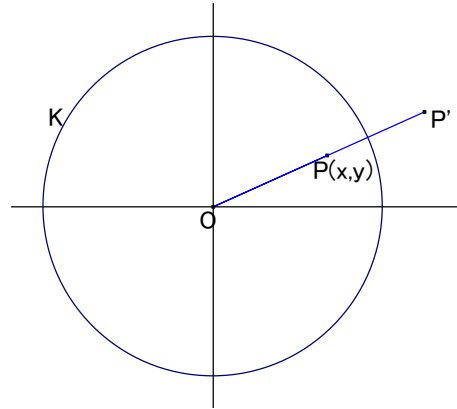


鏡像変換

ユークリッド平面または複素数平面で考えます。また円 K は O が中心で半径が R の円とします。このとき、

定義 点 P の円 K に関する鏡像が P' \Leftrightarrow P' が半直線 OP 上にあり、 $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = R^2$



鏡像変換の式

$$\overline{OP'} = \frac{OP'}{OP} \overline{OP} = \frac{OP' \times OP}{OP \times OP} \overline{OP} = \frac{R^2}{x^2 + y^2} \overline{OP}$$

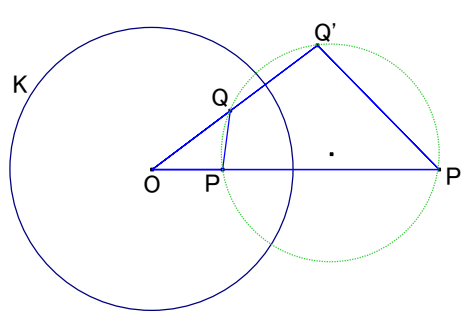
よって、 O 中心、半径 r の球 K に関する点 P の鏡像は、

$$P' \left(\frac{R^2 x}{x^2 + y^2}, \frac{R^2 y}{x^2 + y^2} \right)$$

A. 最も基本的な性質

A1. (鏡像と相似) 点P, Qの円Kに関する鏡像がP', Q'のとき, $\triangle OPQ \sim \triangle OQ'P'$

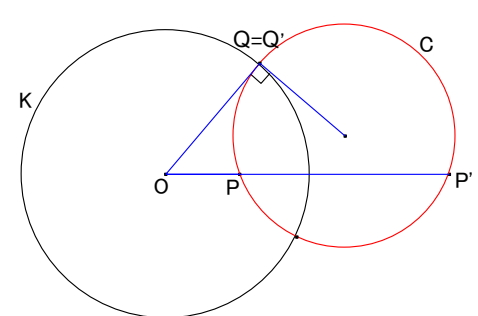
A1'. 点P, Qの円Kに関する鏡像がP', Q'のとき, 4点P, Q, P', Q'は同一円上にある.

| | |
|---|--|
|  | <p>証明</p> <p>定義より,</p> $OP \times OP' = OQ \times OQ' = R^2 \dots \textcircled{1}$ <p>よって,</p> $OP : OP' = OQ : OQ'$ <p>ゆえに,</p> $\triangle OPQ \sim \triangle OQ'P' \dots \textcircled{2}$ <p>また①より, 方べきの定理から, 4点P, Q, P', Q'は同一円上にあります.</p> |
|---|--|

Cabri IIによる検証

Drag P, Q, K, O [A1.html](#)

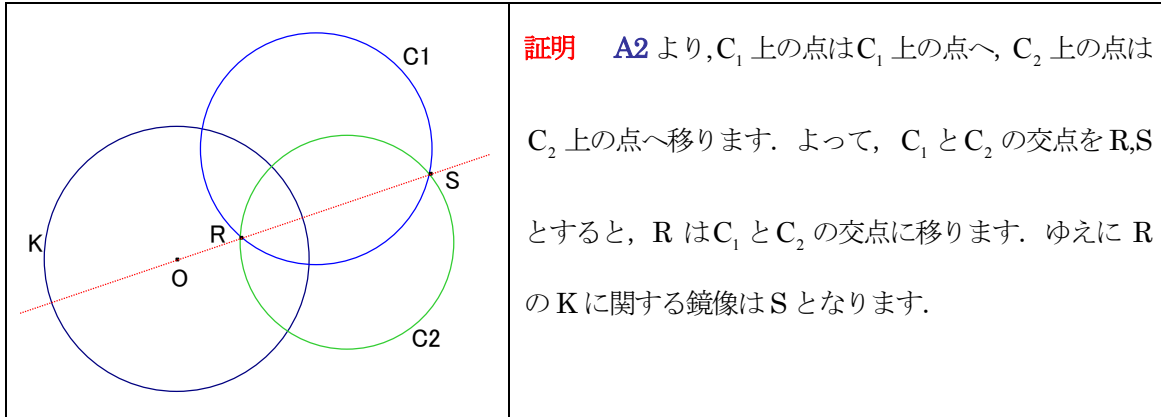
A2.(直交する2円) PとP'が円Kに関し鏡像のとき, PとP'を通る円CとKは直交します. 逆に円Cと円Kが直交しているとき, 円C上の点PとOを結ぶ半直線とCのP以外の交点をP'とすると, PとP'はKに関し鏡像となります.

| | |
|---|--|
|  | <p>証明</p> <p>KとCの交点をQとすると, Kに関する鏡像によってQは動きません. よって鏡像の定義より</p> $OP \times OP' = OQ^2 = R^2$ <p>「方べきの定理」より, 直線OQは円Cの接線となる. ゆえに,</p> $\text{円C} \perp \text{円K}.$ <p>逆も「方べきの定理」より成り立ちます.</p> |
|---|--|

Cabri IIによる検証

Drag P, K, O [A2.html](#)

A3.(直交する 2 組の円の交点) K に 2 円 C_1, C_2 が直交している時, C_1 と C_2 が 2 点で交わるならば, その 2 点は K に関し互いに鏡像となる.



【注】これから,

K に 2 円 C_1, C_2 が直交しているとき, C_1 と C_2 の 2 交点を結んだ直線は K の中心を通ることも言えます.

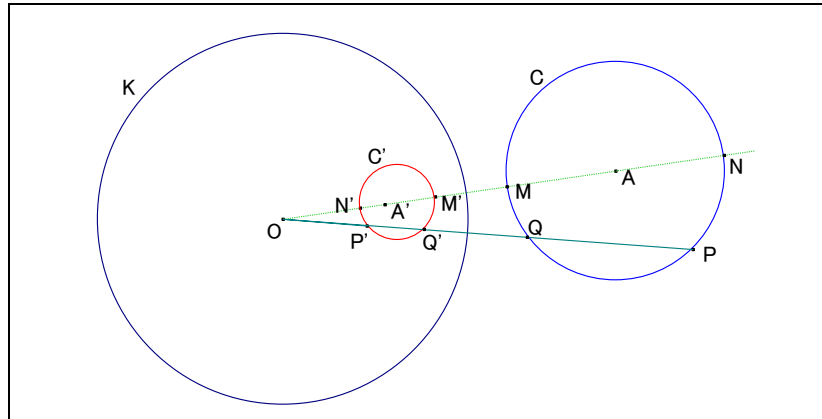
Cabri II による検証

Drag P, Q, K, O [A3.html](#)

B. 円や直線の像

B1.(円の像 - 1)

円Cが円Kの中心Oを通らないとき、円Cの像は、Oを通らない円になる。



証明 円Cの中心をA. 直線OAと円Cの交点をM,N, さらに円C上に適当な点Pをとり, 半直線OPと円Cの交点のうちP以外の点をQとします. M, N, P, QのKに関する鏡像をM', N', P', Q', Kの半径をRとすると

$$\begin{cases} OP \times OP' = R^2 \\ OQ \times OQ' = R^2 \\ OM \times OM' = R^2 \\ ON \times ON' = R^2 \end{cases} \dots \textcircled{1}$$

P, M, N, Qは同一円上にあるので「方べきの定理」より

$$OP \times OQ = OM \times ON \dots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$OP' \times OQ' = OM' \times ON'$$

ゆえに「方べきの定理」よりP', Q', M', N'は同一円周上にあります. この円をC'とすると, 対称性からC'は線分M'N'を直径とする円で, P, Qによりません. ゆえにCの像は円C'となります.

[注] 「CがOを通らない」という条件は, 直線ON, OPを引くために使用しました.

Cabri IIによる検証

Drag A, C, P, K [B1.html](#)

B2.(円の像 - 2)

円 C が円 K の中心 O を通るとき、円 C の像は、O を通らない直線になる。

| | |
|--|---|
| | <p>証明 円 C の中心を A, P を C 上の点, ON を O を通る直径, PN の円 K による鏡像を P', N' とすると,</p> $\angle OPN = \angle R$ <p>A1 より「$\triangle OPN \sim \triangle ON'P'$」だから,</p> $\angle ON'P' = \angle OPN = \angle R$ <p>ゆえに, P' は N' を通り直線 ON と直交する直線 l を描きます. $N' \neq O$ だから, l は原点を通りません.</p> |
|--|---|

Cabri II による検証

Drag A, P, K [B2.html](#)

B3.(直線の像)

l を直線とする. l が K の中心を通らないとき, l の像は O を通る円となる. (B2 の逆)

l が K の中心を通るとき, l の像は O を通る直線となる.

| | |
|--|--|
| | <p>証明 l が O を通らない時, P を l 上の 1 点, O から l へおろした垂線の足を N, さらに N と P の K に関する鏡像を N', P' とします.</p> <p>A1 より「$\triangle OPN \sim \triangle ON'P'$」だから,</p> $\angle OP'N' = \angle ONP = \angle R$ <p>故に P' は ON' が直径の円上を動きます. また, l が O を通るときは明らかです.</p> |
|--|--|

Cabri II による検証

Drag P, N, K [B3.html](#)

【注】 l が O を通らないとき, P が l 上を無限遠点に向けて動くと P' は O に限りなく近づくが O とは一致しません. ところが無限遠点も l の一部と考えると, l の像は円全体となります. 普通はこのように無限遠点も入れて直線と考えます. またこのような直線と円を一緒にして「一般化された円」とし 太字の 円 で表すと, 「円の鏡像は円となる」と言えます. なお A1, A2 も 円 に関して成り立ちます.

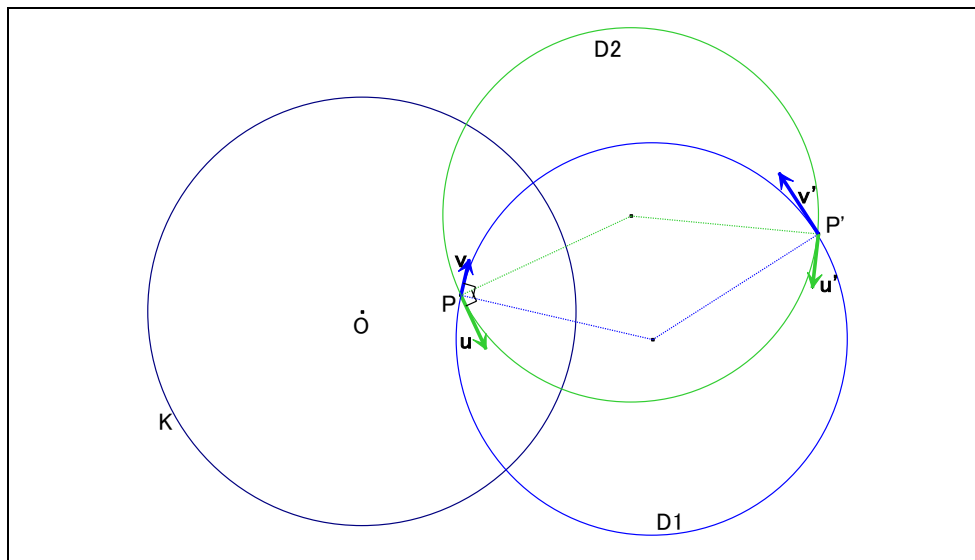
C. 曲線に関する定理 \bar{v}

点 P で交わる滑らかな 2 曲線 のなす角は、 P における 2 曲線の接線のなす角と定めます。

【注】 これ以後の定理も、「一般化された円」に対して成り立ちます。

C1. (等角性) 点 P で 2 曲線 C_1 と C_2 が交わるとし、 P , C_1, C_2 の円 K に関する鏡像を P', C_1', C_2'

とすると、点 P における C_1 と C_2 のなす角は、 P' において C_1' と C_2' がなす角と等しい。



証明 P における C_1, C_2 の接線方向ベクトルを \bar{u}, \bar{v} , P' における C_1', C_2' の接線方向ベクトルを \bar{u}', \bar{v}' , また K に関する鏡像変換を f とします. (C_1, C_2 は図に描いていません.) いま「 P, P' を通り P に於いて \bar{u} と接する円」を D_1 とすると「接している曲線と直線は f で移しても接する」から、 $f(\bar{u}) = \bar{u}'$ と $f(D_1)$ も点 P' で接します. ところが **A2** より「 D_1 の鏡像は D_1 自身」なので、 \bar{u}' と D_1 が点 P' で接します. 同様にして「 P, P' を通り P に於いて \bar{v} と接する円」を D_2 とすると、 \bar{v}' と D_2 が点 P' で接します. ところが、点 P と点 P' において 2 円のなす角は等しいので、「 \bar{u} と \bar{v} のなす角」と「 \bar{u}' と \bar{v}' のなす角」は等しくなります. **Q.E.D.**

Cabri II による検証

Drag K,O,P,Q,R

[C1.html](#)

【別証明】

| | |
|--|--|
| | <p>QはC₁上の点で、PとQは非常に近いとします。</p> <p>P,QのKによる鏡像をP',Q'とすると、A1より、 $\angle OQP = \angle OP'Q' \dots \textcircled{1}$</p> <p>また、 $\angle QPP' = \angle OQP + \angle POQ \dots \textcircled{2}$</p> <p>P→Qの時、直線PQはC₁のPにおける接線、直線P'Q'はP'におけるC₁'の接線に一致します。</p> <p>またこのとき「$\angle POQ \rightarrow 0$」だから、①,②より</p> $\angle QPP' = \angle Q'P'P$ <p>故に、C₁と直線OPのなす角は、C₁'と直線OP'のなす角と等しくなります。</p> <p>2曲線C₁とC₂のなす角の場合も、直線OPで分けて考えると、角が保存されます。すなわち左図で、「$\angle APP' = \angle A'P'P$かつ$\angle BPP' = \angle B'P'P$」から、 $\angle APB = \angle A'P'B'$</p> <p>と言えます。</p> |
|--|--|

また、対応する2接線PAとP'A'の交点Eと、PBとP'B'の交点Fは、PとP'の垂直2等分線N上にあります。即ち「Pにおける2つの接線」と「P'における2つの接線」はNに関し線対称となります。

Cabri IIによる検証

Drag P, C₁, C₂, O, L, M, K

[C1'.html](#)

