４．「独立な曲面」としての 円錐

円錐（「直円錐」とします）や円柱は，ユークリッド平面上に展開できますが，**「軸の周りに2π まわると同じ点に来る」**という偽球と同様の性質があるため，ユークリッド幾何とは多少異なります．偽球がポアンカレ上半平面 H⁺と異なっているのと同様です．

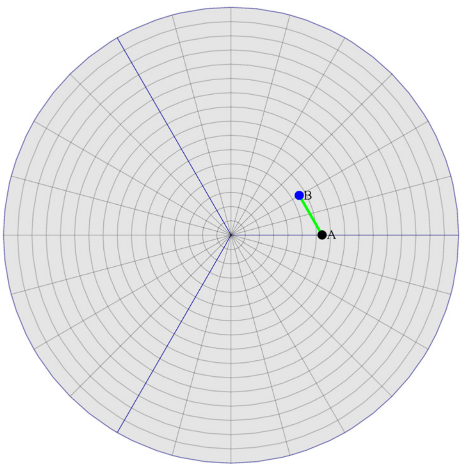
偽球は　H⁺を丸めて　ユークリッド空間内に埋め込んだものなので，円柱の方が偽球により近いのですが（三角形），CG としての面白さから，円錐をまず考えます．

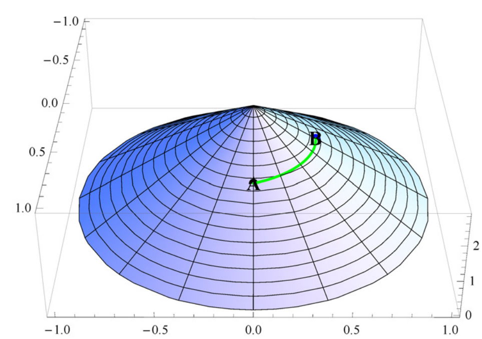
そして，第 3 節と同様，円錐がユークリッド空間の中に埋め込まれていることを忘れて，「円錐の上だけで，幾何がどのように成り立つのか」を考えます．いわば 円錐上の頭のよい蟻さんが，どのような幾何を作るか？ です．展開図も考えますが，蟻さんは円錐上を何周もするため，展開図を何枚もつないで考えます．

下の円錐は「半径が 1，母線が 3」の円錐で，見やすくするため 高さを実際の$1/5$倍程度にしています．「母線/半径=3」なので，展開図の中心角は「$360^\circ \times \frac{1}{3} = 120^\circ$」となります．左下図は　その展開図を 3 枚つなげたものです．一般に「半径が 1，母線が l の円錐」を展開したとき，展開図上の点 P の極表示が (r,θ) ならば，下の変換g で P は　円錐上で対応する点P' に移ります．

$$(r,\theta) \xrightarrow{g} \left(\frac{r}{l}\cos l\theta,\ \frac{r}{l}\sin l\theta,\ \frac{l-r}{l}\sqrt{l^2-1} \right)$$

$0 \le l\theta < 2\pi$ の時は，この対応は 1 対 1 です．しかしここでは，θ の変域を全ての実数にします．これは展開図を，継ぎ目なく何枚もつなげて考える事に当たります．（**拡張展開図**と呼ぶことにします）．簡単のため l を自然数に制限し，l 枚の展開図を半径 l の円の中に 一層だけ描くことにしました．各々の展開図は青色の線分で区分されています．円の中心が円錐の頂点に当たります．



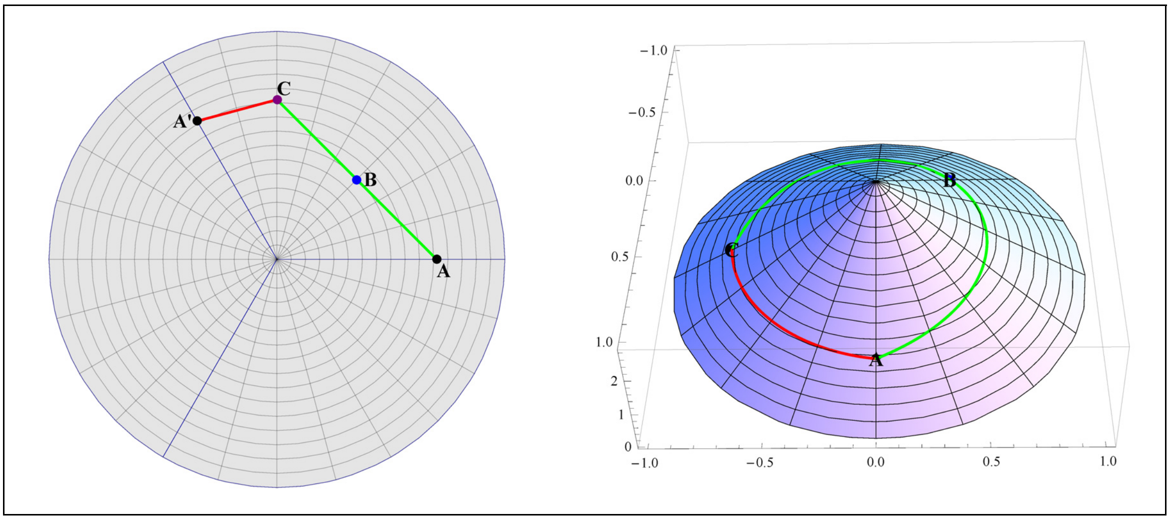


4-1. 円錐上の線分，直線

以下　A,B,C… は円錐の頂点でないとします.

A と B の最短距離線は，展開図上で線分になり，円錐上で 2 点 A,B の偏角の差が π でなければ一通りに決まります. しかし，偽球と同様，**線分を最短距離線と定義すると，線分が延長できません.**

下図は「母線/半径=3」の円錐です. この円錐の拡長展開図上で **偏角が $\frac{2\pi n}{3}$ 異なる 2 点 A と A' は 円錐上で同じ点に対応します.**　例では，A と C の偏角の差が $\frac{\pi}{3}$ を超えてしまったので，線分 AB+BC=AC の長さより，線分 A'C の長さが短くなります. 故に 線分 AC は最短でありません.

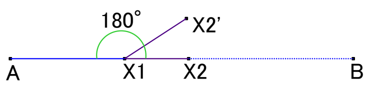


Mathematica による検証

Mathematica6/7 または mathematica player (無料)が必要です. サイズの変更は右下のメニューから，または図をクリックした後 drag して下さい.　　　example1.nbp

偽球と同様に，線分，直線を 次のように定義します.

定義: 点 A に十分近い点 X_1 を取り 最短距離線 AX_1 を作ります. それを線分の場合と同様にして，点 X_1 の側に延長をします. この操作を繰り返したとき　その延長した線分が点 B を通るならば それを線分 AB と定義します.　さらに線分 AB を可能な限り延長した線分（またはその極限）を直線 AB とします.



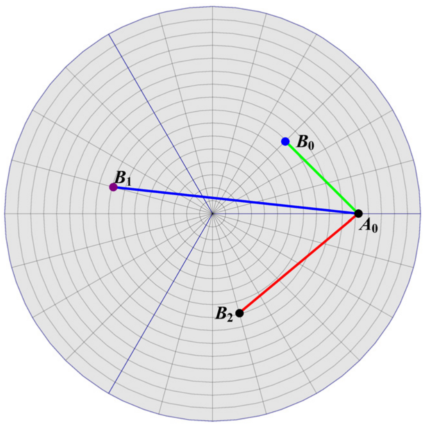
このとき，もはや線分は最短距離線とは限りません. また 2 点 A,B を通る線分は無数に出来ます. 直線 AB も一通りに決まりません.

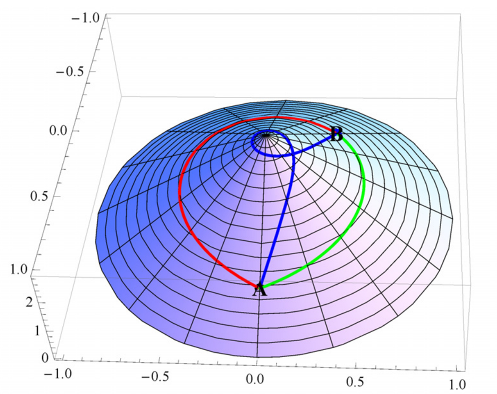
4-1. 拡張展開図との対応

以下，「母線/半径=l」とします．**円錐上の線分(直線)AB は，拡張展開図上の線分(直線) A_0B_0 に対応します．**但し「A_0, B_0 が $\dfrac{2\pi}{l}$ の整数倍違っていても　円錐上の対応する点 A,B は同じになる」ので，円錐上では，A,B を通る線分 は一本とは限りません．

下図は $l=3$ の円錐です．B_0, B_1, B_2 は，偏角が $\dfrac{2\pi}{3}$ ずつ異なり，円錐上ではすべて点 B と同じ点に対応します．よって，展開図上の線分 AB_0,AB_1, AB_2 は　円錐上で全て A,B を通る線分です．

一般に　「円錐上では 偏角の変化は l 倍」となるので，展開図上で 偏角の変化が 45° である線分 AB_0 は 円錐上では　変化が 135° になります．同様に，偏角の変化が 165° である線分 AB_1 は 円錐上では　変化が「$495^\circ = 360^\circ + 135^\circ$」になり　頂点の周りを一周します．





Mathematica による検証

上の例です．　　　　　　[example2.nbp]

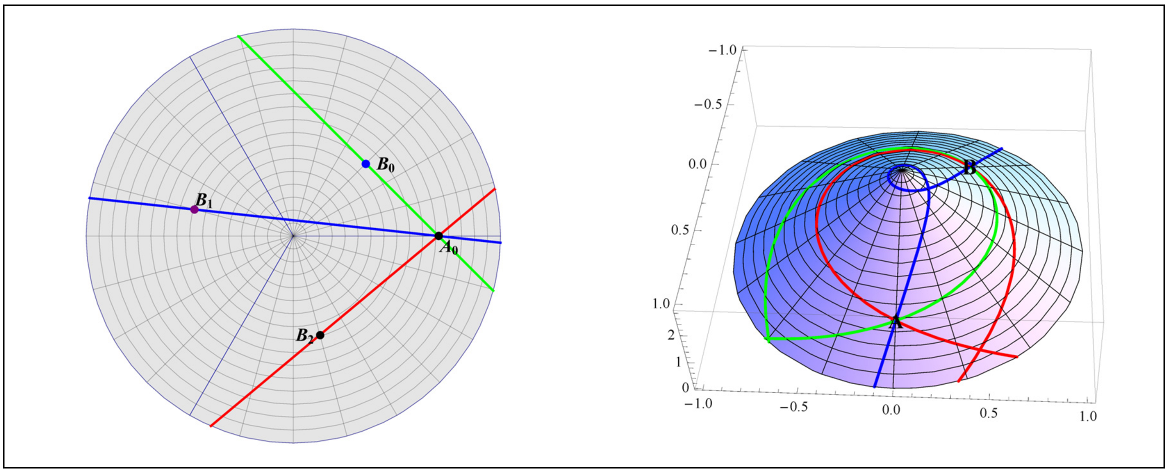
4-1-1. 異なる線分の本数

例では，円錐上で点 B と一致する点は 拡張展開図上で 3 個取れました．したがって円錐上で，A,B を通る線分は 3 本引けました．$l=3$ のときは，展開図を 3 枚より多くつなげても B と対応する点は増えないので，円錐上で点 A,B を通る線分はちょうど 3 本です．

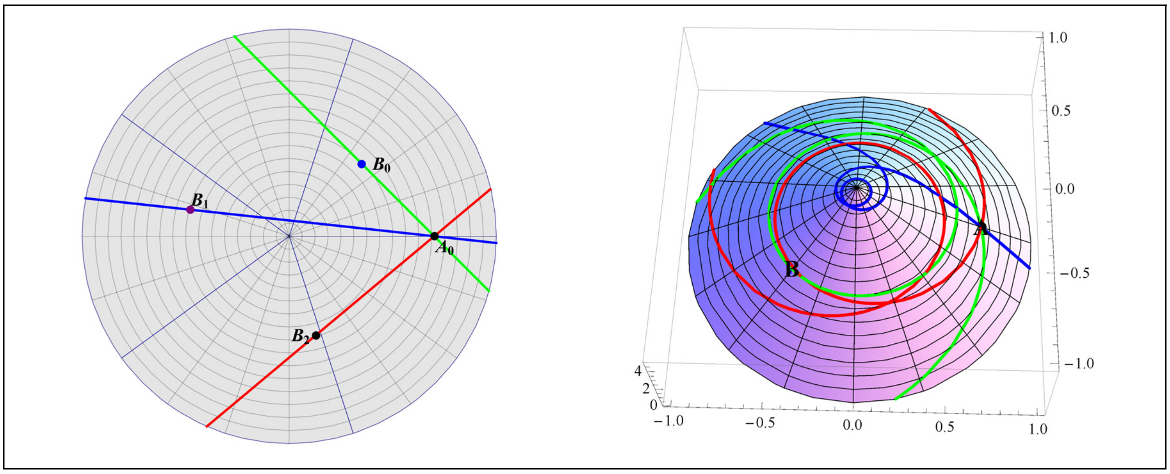
一般に l が自然数のときは，円錐上で A,B を通る線分は l 本になります．l が有理数 $\dfrac{q}{p}$（p,q 互いに素）のときも，$(q+1)$ 枚目の展開図は 1 枚目の展開図とまったく重なるので，A,B を通る線分は q 個です．l が無理数のときは，「展開図が完全に重なることがない」ので，無数の線分が引けます．

4-1-2. 直線の回転数

線分と同様, 直線も何本も引けます. また, 頂点の周りを何周もすることがあります. 次の例は　前頁の「線分 AB」を「直線 AB」に変えただけです. $l = 3$ のときは 直線 AB も 3 本引けます.



一般に　「一枚の展開図の中心角は $2\pi / l$」です. 一方, 拡張展開図上で直線の偏角の変化は π より小さいので, 直線は $\dfrac{\pi}{2\pi / l} = \dfrac{l}{2}$ 周以上 頂点の周りを回転することはありません. 下の例は $l = 5$ の円錐です. 紺色の直線はほぼ 2.5 周していますが 2.5 周以上廻ることはありません. なお, 以上のことは， l が無理数であっても成り立ちます.



4-1-3. Mathematica による検証

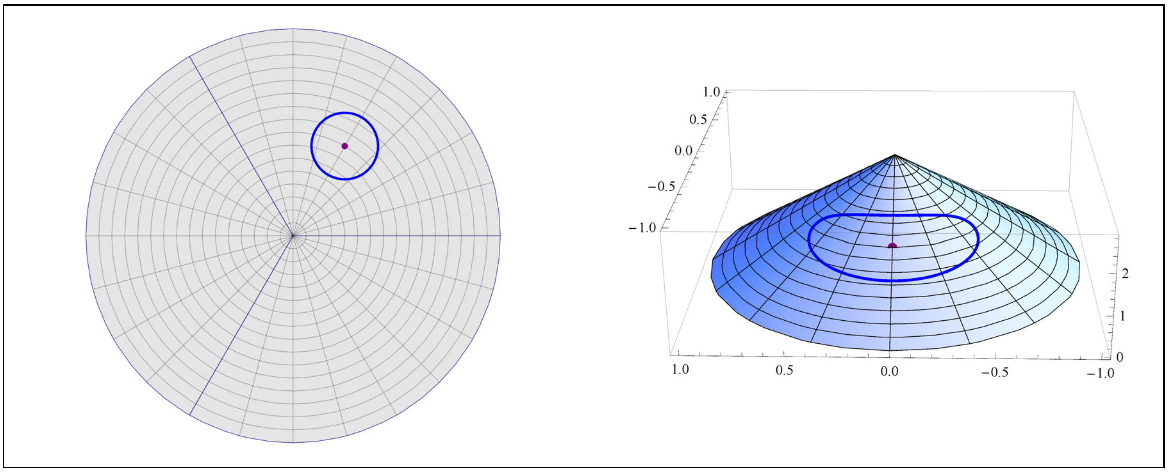
上の 2 つの例です.　　　　　　example3.nbp,　　example4.nbp

直線と円を自由に作って動かすことができます.　Controller の横軸は, 円錐上の偏角で, 縦軸は, 底円から頂点方向への高さです.　　　　　　line&circle.nbp

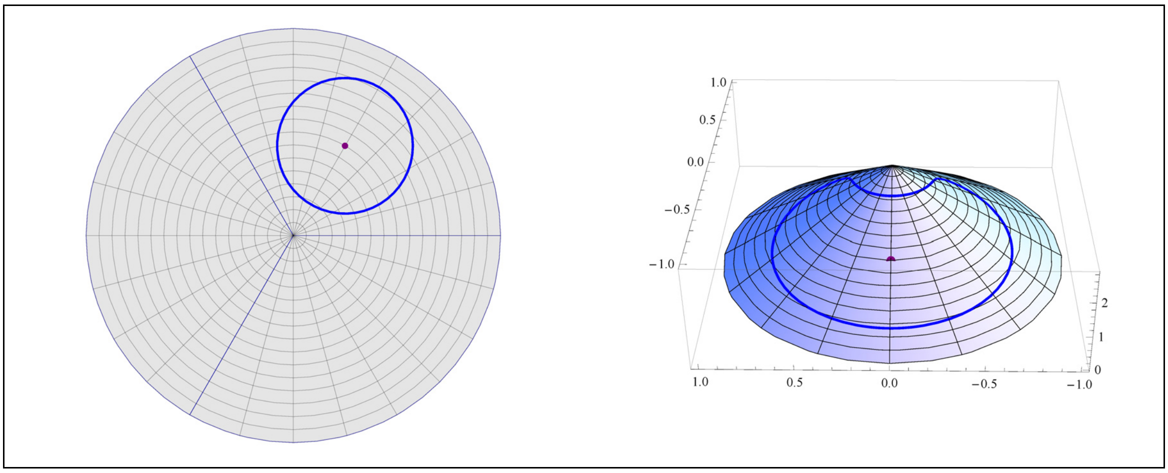
4-2. 円錐上の円

「線分」の一端 O を固定し，他の端 P を動かした時の軌跡　を「円錐上の円」 定義します.「円錐上の円」は,「拡張展開図上の円」と一致します.　以下の例は すべて $l = 3$ の円錐で，中心が側面のちょうど中央の円です.　　（展開図の半径は $l = 3$ です.）

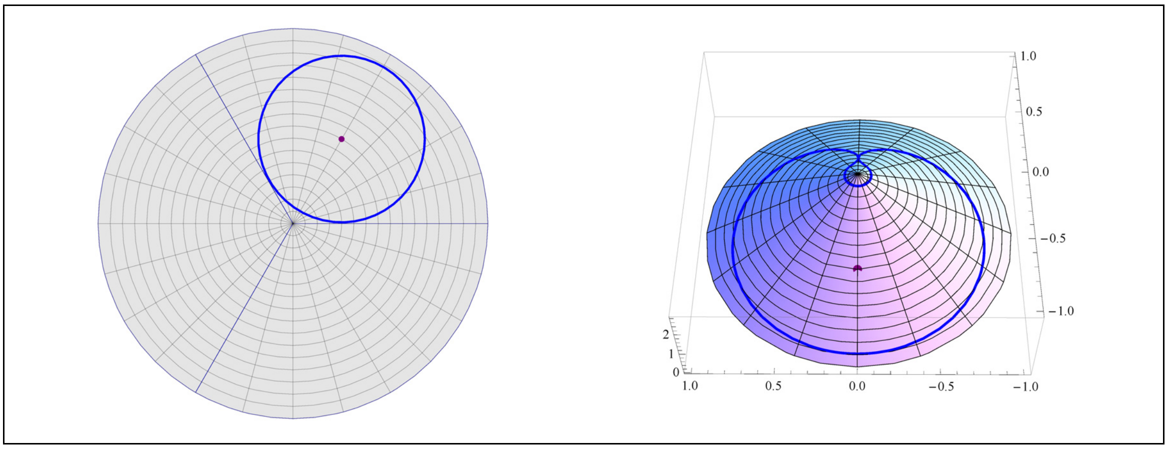
例 1. 半径が 0.5 の円です.



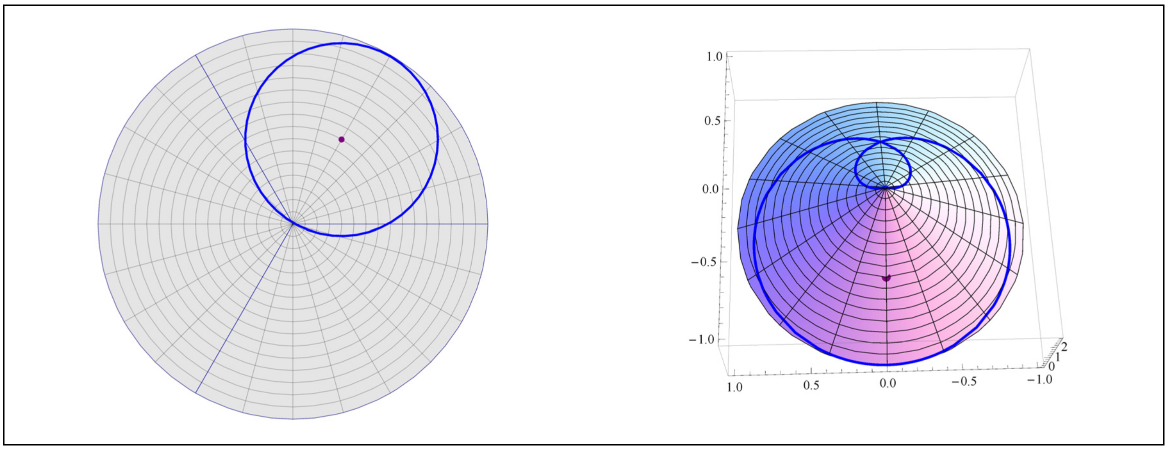
例 2. 半径が 1 の円です.



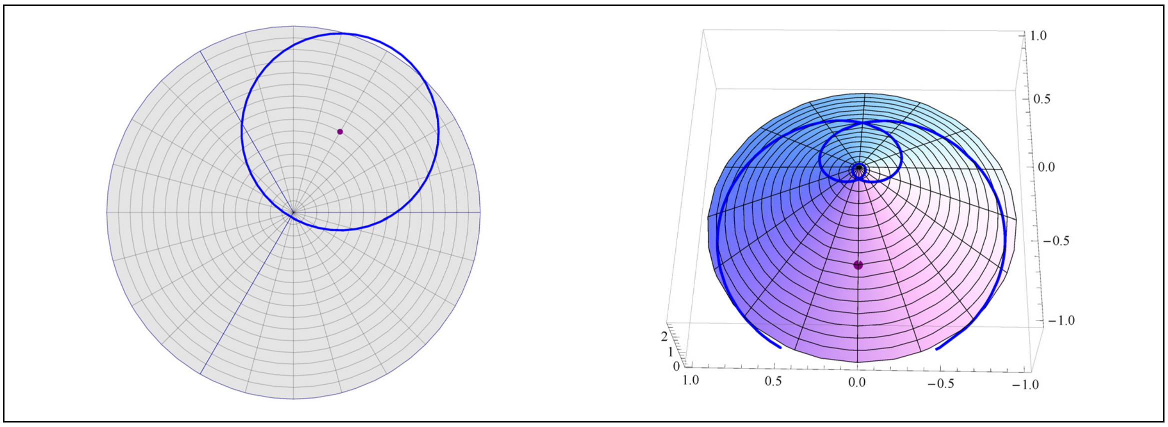
例 3. 半径が $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ の円です．中心の反対側で接しています．



例 4. 半径が 1.5 の円です．頂点を通っています．



例 5. 半径が 1.6 の円です．頂点を含んでいます．頂点の周りを　ほぼ 3 周します．



4-2-1. Mathematica による検証

4-1-3 と同じ file です．ご自分で 中心や半径を変えて 円を作ってみてください．　line&circle.nbp

4-3. 円錐上の三角形

4-3-1. 「閉じた三角形」と「開いた三角形」

円錐上の三角形ABCの「辺AB」を「線分AB」と定義します．すると，偽球と同様にして，円錐上の三角形には2種類あることが分かります．以下 円錐の**拡張展開図**を D と省略します．また 母線/半径 $= l$ とします．（「開いた三角形」は，D上では開いていますが，円錐上ではもちろん閉じています．また「対応するD内の線分をOの周りに $2n\pi / l$ 回転して重なる線分は同一視する」とします．）

(ア) 閉じた三角形

D内でも三角形を作るタイプ．

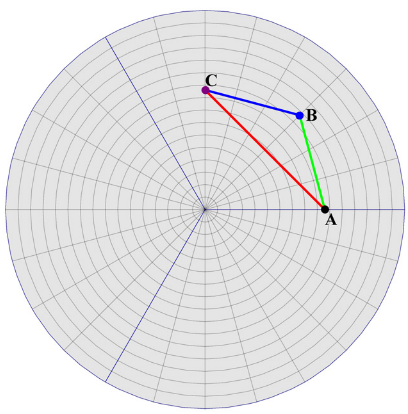
(イ) 開いた三角形

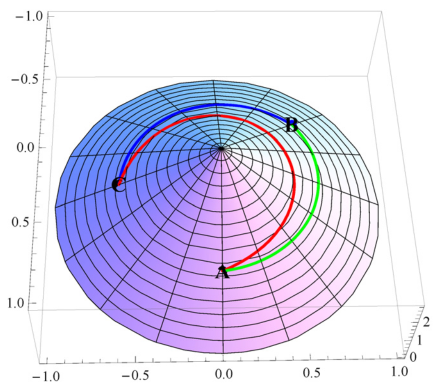
D内で三角形を作らないタイプ．

「閉じた三角形」では，通常の三角比の関係が成り立ちます．「開いた三角形」では 不成立です．

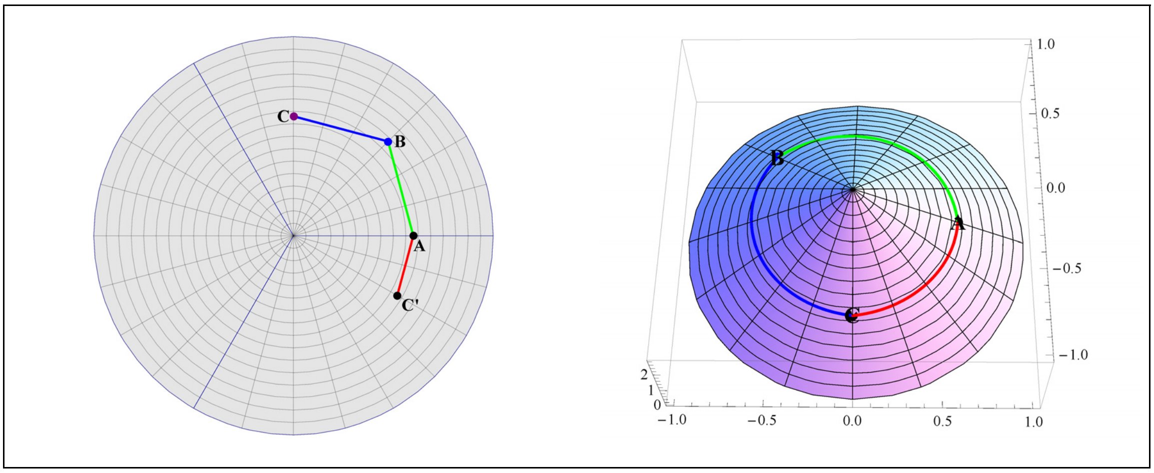
以下，$l = 3$ の円錐です．次の2つの例では A,B,C の円錐上の位置は同じです．

例1.「閉じた三角形」です． ∠A=30°,∠B=120°,∠C=30°で，内角の和は 180° です．

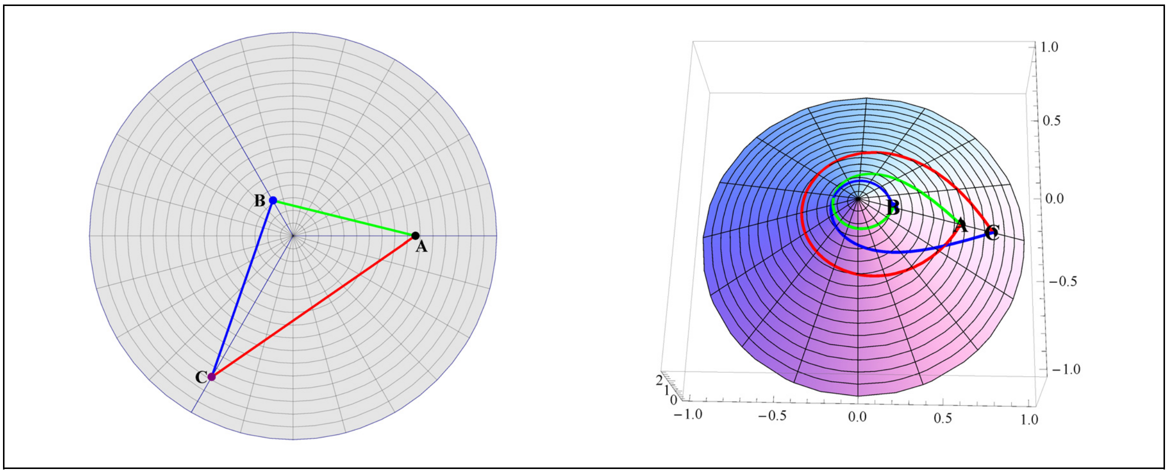




例 2.「開いた三角形」です. $\angle A=150^\circ, \angle B=120^\circ, \angle C=150^\circ$ で, 内角の和は 420° です.
C' はCを$(-2\pi/3)$回転させた点ですが, 円錐上では同じ点を表します. よって, $C' \to A \to B \to C$ と順に点を線分で結ぶと, 円錐上では三角形を作ります. しかしその内角の和は 180° を超えます.



例 3. 偽球では,「閉じた三角形」は頂点を内部に含まず,「開いた三角形」は頂点を含んでいました. 円錐でも「開いた三角形」は頂点を含みます. しかし,「閉じた三角形」でも, 頂点を内部に含むことがあります. そのときは, 2 つの辺が辺の端点以外で交わります.



4-3-2. Mathematica による検証

ご自分で A,B,C を動かして三角形を作ってみてください. 三角形 ABC とあるのが「閉じた三角形」で, 三角形 ABCC とあるのが「開いた三角形」です. 簡単のため, C_0 と C_1 の差は $2\pi / l$ に固定してます. triangle.nbp

上のファイルの 点 A,B,C の動く変域を「 $0 \le \theta < 2\pi, r \le l$ 」に拡大したものです. 三角形 ABCC はありません. wide_triangle.nbp