

3. 「独立な曲面」としての偽球

偽球は本来、ポアンカレ上半平面 H^+ を埋め込んだ曲面ですが、それを忘れて、「偽球の上だけで、幾何がどのように成り立つのか」を考えて見ます。いわば頭の良い蟻さんが偽球上に住んでいたらどのような幾何を作るか？ を考えます。蟻は偽球上を何周もするので、第1節④の変換 g ；

$$Q(x+iy) \xrightarrow{g} Q' \left(\frac{1}{y} \cos x, \frac{1}{y} \sin x, f \left(\frac{1}{y} \right) \right)$$

の変域を H^+ 上の領域 $y \geq 1$ に広げて考え、 H^+ と対応させます。 g により H^+ 上で x 成分が $2n\pi$ 異なる2点 $A(x+iy)$ と $A'(x+2n\pi+iy)$ は偽球上で同じ点に移ります。(n は整数)

まず、ユークリッドの公準は、公準5を除くと、

公準1 異なる2点A,Bを通る線分はただ一本引ける。

公準2 線分は どちら側にも限りなく伸ばすことが出来る。

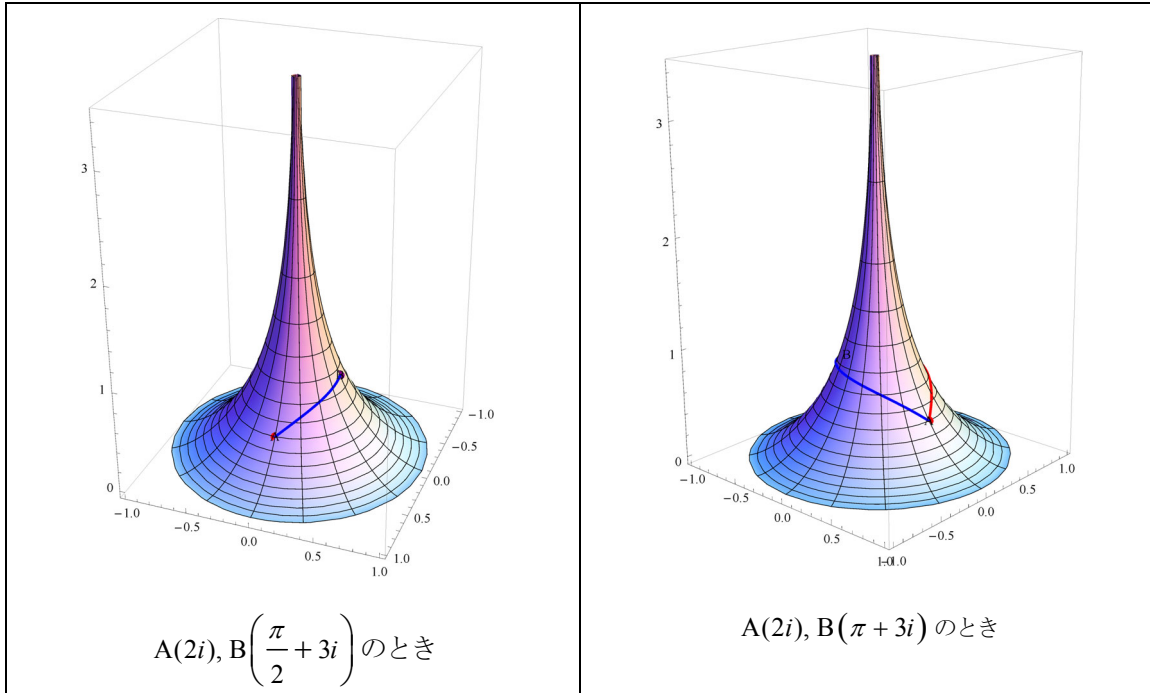
公準3 異なる2点A,Bが与えられたとき、Aを中心としBを通る円をただ一つ作れる。

公準4 直角は全て相等しい。

です。しかし、偽球は有限なので公準2は成り立ちません。また後で述べますが 公準1も成り立ちません。一方、公準3と公準4は成り立ちそうです。従って「偽球上では双曲幾何が成り立つ」とよく言われますが、厳密な意味では成り立ちません。しかし、円錐や円柱上で、ユークリッド幾何が成り立つ程度には、双曲幾何が成り立ちます。

3-1. 偽球上の最短距離線

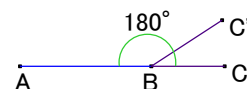
A と B を結ぶ最短距離線は「点 A と点 B の偏角の差が π のときは、2 本引けますが、それ以外のときは 1 つに決まります。」（球面や円錐、円柱でも同様です。）右下図で、最短距離線 AB は「右回り」と「左回り」の 2 本あります。偏角の差が π 以外の時は、最短距離線は 1 つに決まります。



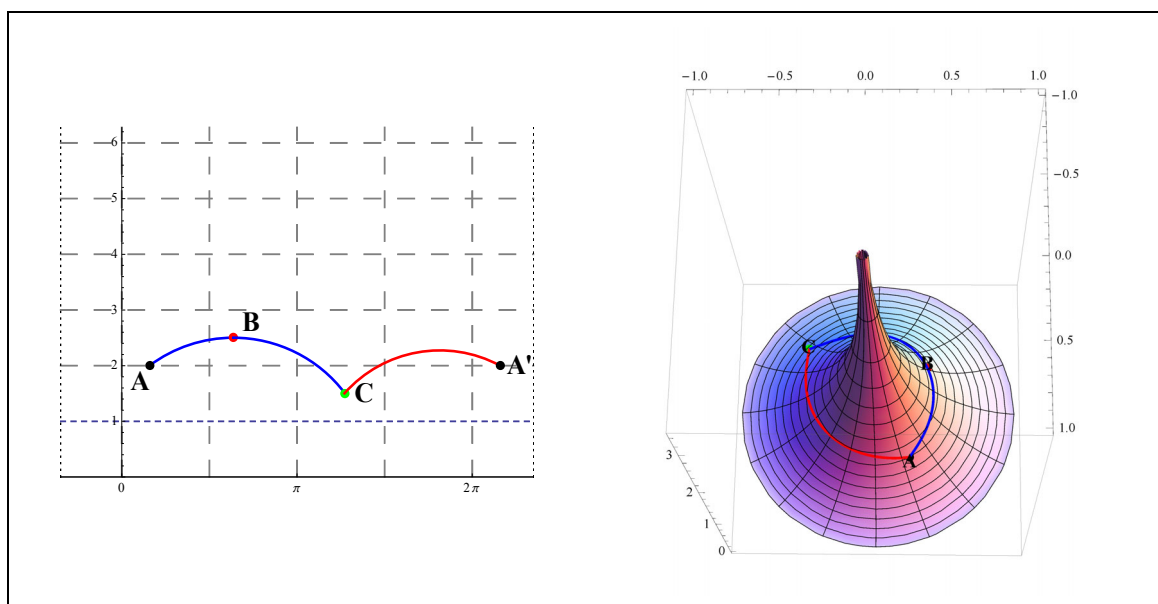
3-2. 偽球上の線分, 直線

線分 AB を「A と B の最短距離線」と定義することができそうですが, しかし, この定義では 線分がうまく延長できません.

点 B の近くで, 点 C を「角 ABC が 180° 」となる様にとったとき, 線分 AB+BC (和集合) を「線分 AC」と定義し, 「線分 AB の B の側への延長」と呼びます. 「線分 AB を線分 AC に延長する事」は, H^+ に於いて A,B を通る双曲の半直線上に C を取る事と一致します.



しかしこの時, 線分 AC は最短距離線とは限りません. (下図)



H^+ 上で x 成分が $2n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 異なる 2 点 $A(x+iy)$ と $A'(x+2n\pi+iy)$ は 偽球上で同じ点に対応します. 上の例では A と C の x 成分の差が π を超えてしまったので, 線分 AC の長さより, 線分 A'C の長さが短くなります. ゆえに線分 AC は最短距離線ではありません.

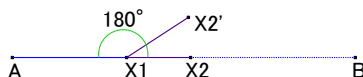
(もし A と C の x 成分の差が ちょうど π ならば, 線分 AC と線分 A'C の長さは等しくなります. すなわち A と C の最短距離線は 2 本になります. 3-1 参照)

3-2-1. Mathematica による検証

Mathematica6/7 または mathematica player (無料)が必要です. サイズの変更は右下のメニューから, または図をクリックした後 drag して下さい. [example1.nbp](#)

3-2-2. 延長可能性の方を重視して, 線分を次のように定義します.

定義: 点Aに十分近い点 X_1 を取り 最短距離線 AX_1 を作ります.それを線分の場合と同様にして, 点 X_1 の側に延長をします. この操作を繰り返したとき その延長した線分が点Bを通るならばそれを線分ABと定義します. さらに線分ABを可能な限り延長した線分(またはその極限)を直線ABとします.



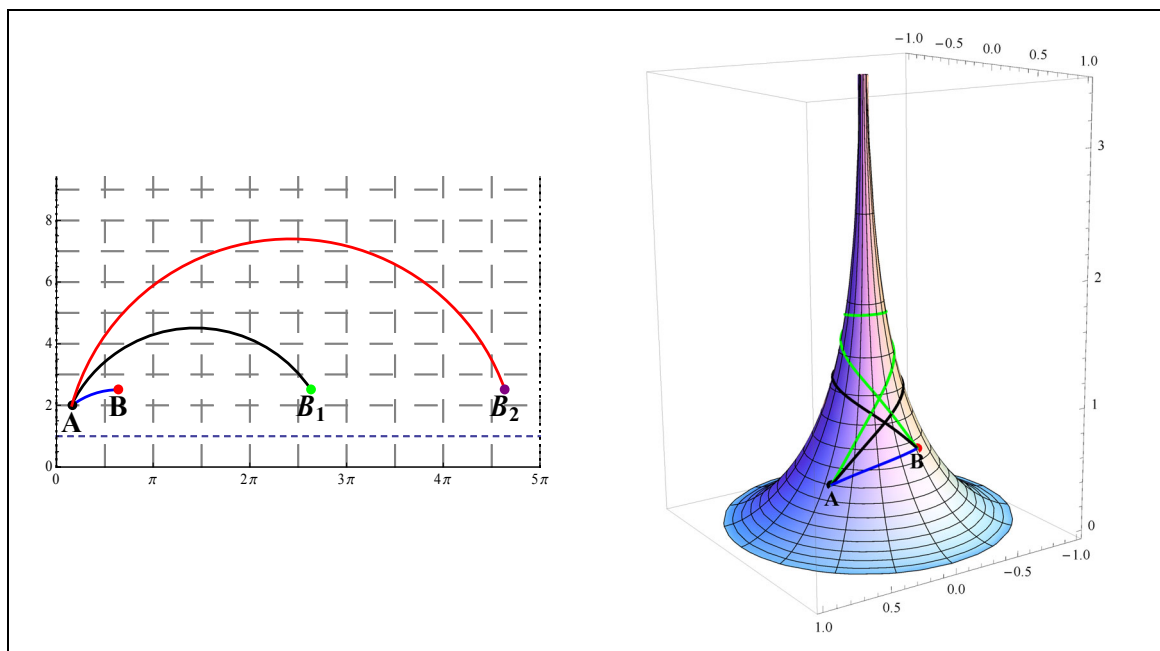
このとき, もはや線分は最短距離線とは限りません. また2点A,Bを通る線分は無数に出来ます. 直線ABも一通りに決まりません.

3-2-3. H^+ との対応

偽球上の線分(直線)ABは, H^+ 上の双曲的線分(直線) A_0B_0 に対応します. 但し偽球上では, A,Bを通る線分は無数にあります.

例えば, 下図で B, B_1 , B_2 は, x 成分のみ 2π ずつ異なり, 偽球上ではすべて点Bと同じ点に対応します. よって, H^+ 上の双曲的線分AB, AB_1 , AB_2 は 偽球上で全てA,Bを通る線分です. 双曲的線分 AB_1 は Aと B_1 の x 成分の差が 2π より大きいので, 対応する線分は 尖塔の周りを1周します. 同様に, 線分 AB_2 に対応する線分は 尖塔の周りを2周します.

さらに H^+ 上の双曲的線分AB上で十分近い任意の2点P,Qを取ると, PとQの最短距離線分は双曲的線分ABに含まれます. 線分 AB_1 , AB_2 についても同様です. 線分は「最短距離線の集まり」ですが, それを集めた「線分」は, もはや 最短距離線とは限りません.



3-2-4. Mathematica による検証

Mathematica6/7 または mathematica player (無料)が必要です. サイズの変更は右下のメニューから, または図をクリックした後 drag して下さい.

先の例を マウスで動かして見る事が出来ます.

[example2.nbp](#)

直線 AB, 最短距離線 AB, または最短距離線分 PQ を自由にマウスで操作できます.

[line.nbp](#)

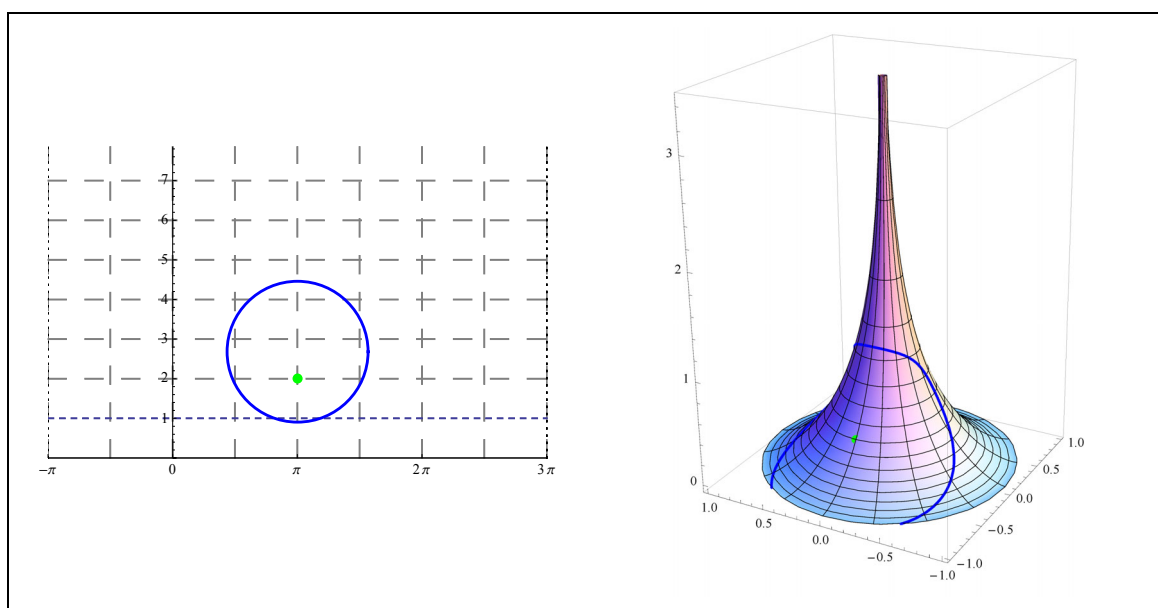
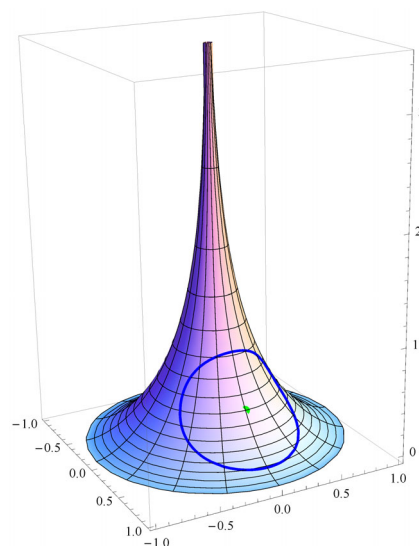
3-3. 偽球上の円

「線分」の一端 O を固定し, 他の端 P を動かした時の軌跡と定義します. このように定めると, H^+ に於ける双曲的円を g で移した図形が 偽球における円と一致します.

右の図は 中心が $C(2i)$, 半径が $r = 0.5$,

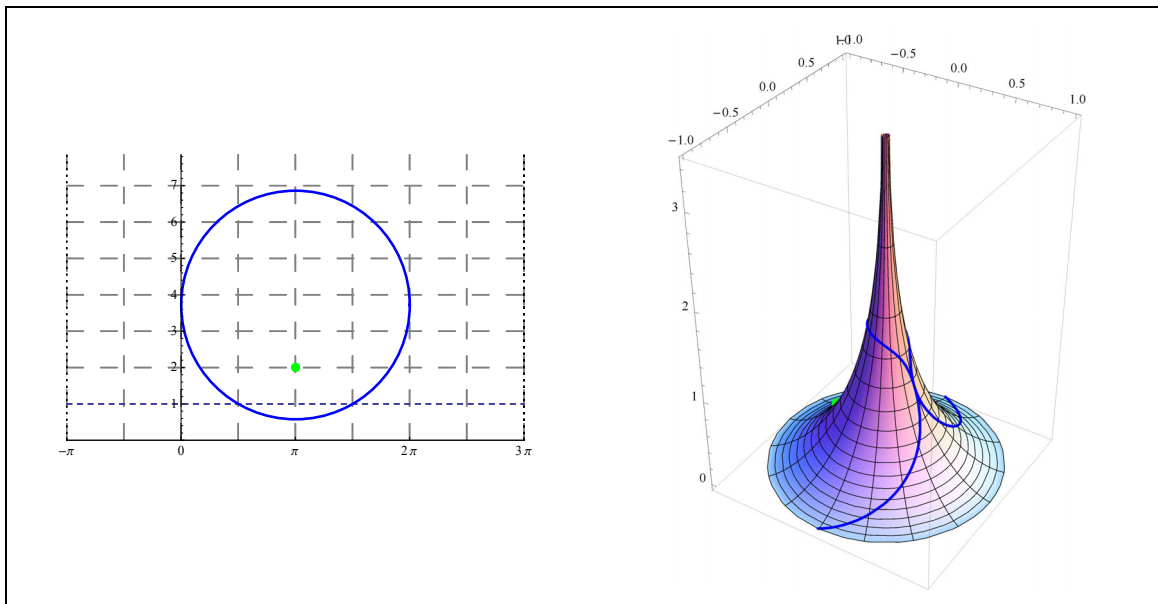
下図は 中心が $C(\pi, 2)$, $r = 0.8$ の双曲的円を 偽球上に移した円です. これらの円は 普通の円に見えます.

しかし, **線分**と同様に, **円周**が尖塔の周りを何周もすることがあります.

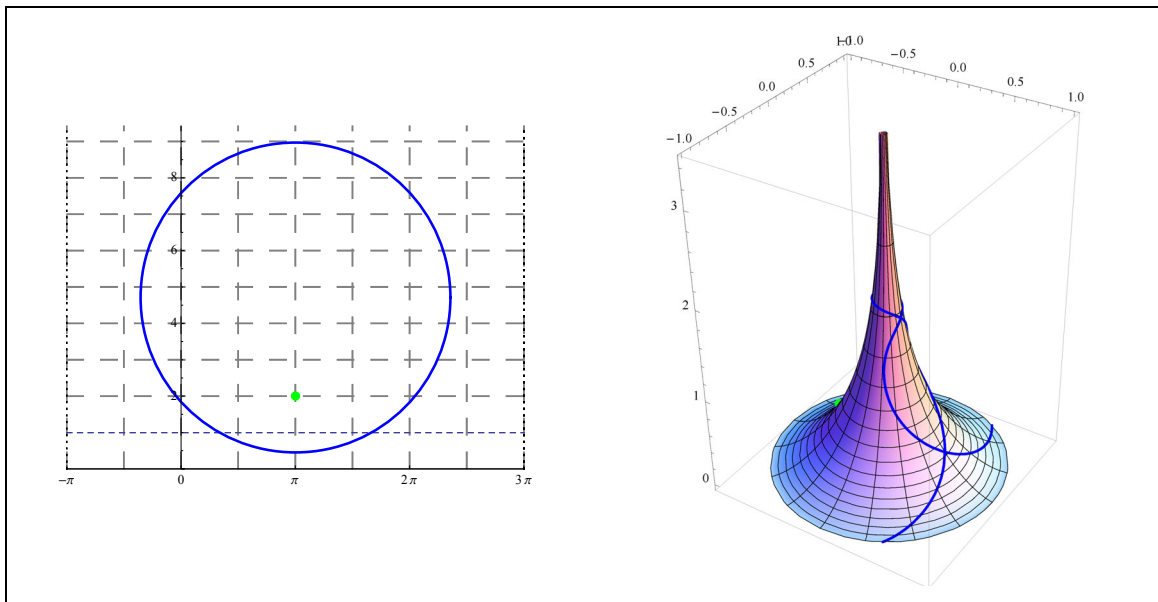


次の図は 中心が $C(\pi, 2)$, $r = \log \frac{\sqrt{4 + \pi^2} + \pi}{2} \doteq 1.2334$ の円です. このとき H^+ では, 円は

$0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲に有ります. よって偽球上では, $\theta = 0$ の経線上で円周が接します. この接点は H^+ では $x = 0, x = 2\pi$ の点に当たります.



さらに, 半径を大きくすると, 円周は尖塔に巻きついていきます. 下図は 中心が $C(\pi, 2), r = 1.5$ の円です. $\theta = 0$ の経線をまたぎ両側で 60° ぐらいずつ はみ出しています.



3-3-1. Mathematica による検証

ご自分で 中心や半径を変えて 円を作ってみてください. また「半径表示」にチェックを入れ, 半径を回転させると, H^+ 上の円と偽球上の円の対応が良く分かります. circle.nbp

3-4. 偽球上の三角形

3-4-1. 「閉じた三角形」と「開いた三角形」

偽球上の三角形 ABC の「辺 AB 」を「線分 AB 」と定義します。さらに線分 AB , BC , CA に対応する H^+ 内の線分をそれぞれ c, a, b と書くことにします。線分 c, a, b は水平に $2n\pi$ 平行移動しても、偽球では同じ線分を表します。よって適当な H^+ 内の平行移動によって、線分 a と c は1点 B_0 を共有させることができます。このとき線分 c の他の端点を A_0 , 線分 a の他の端点を C_0 とすると、線分 b の端点を A_0 と重ねても、 b の他の端点 C_1 は C_0 と一致するとは限りません。 C_0 と $2n\pi$ ずれているかも知れません。以上から、偽球上の三角形には2種類あることが分かります。「開いた三角形」と言っていますが、それは H^+ 内での話で、偽球上ではもちろん閉じています。

(ア) 閉じた三角形

対応する H^+ 内の線分が、 H^+ 内でも三角形を作るタイプ。

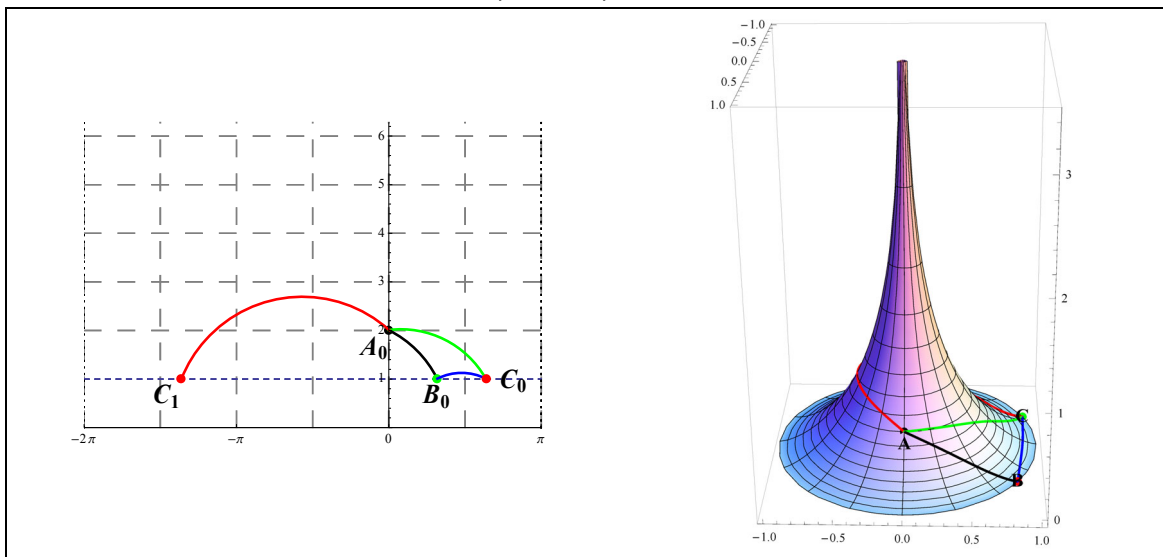
(イ) 開いた三角形

対応する H^+ 内の線分が、 H^+ 内で三角形を作らないタイプ。

(但し「対応する H^+ 内の線分を実軸と平行に $2n\pi$ 平行移動して重なる線分は同一視する」とします。)

「閉じた三角形」では、双曲幾何の三角比の関係が成り立ちます。「開いた三角形」では成り立ちません。

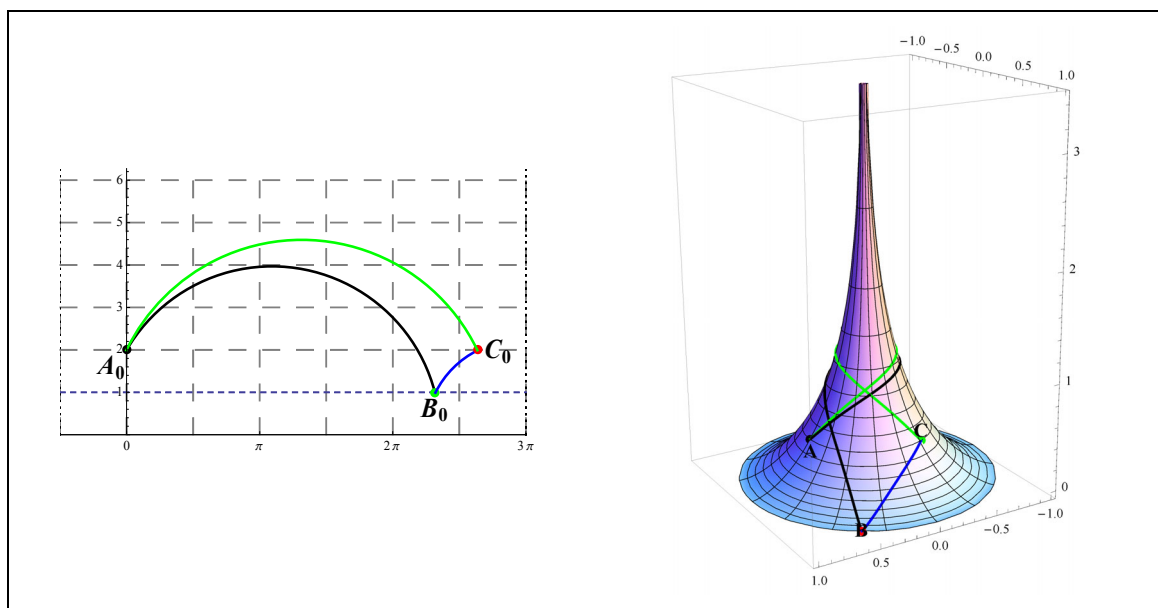
例1. 線分 AB, BC と緑色の線分 AC で作られた三角形が「閉じた三角形」です。線分 AB, BC と赤色の線分 AC で作られた三角形が「開いた三角形」です。 H^+ 上, $A_0(2i), B_0(1+i), C_0(2+i)$ です。このとき、「閉じた三角形」では $\angle A=34^\circ, \angle B=90^\circ, \angle C=34^\circ$ で、内角の和は 157° です。しかし、「開いた三角形」では $\angle A=165^\circ, \angle B=90^\circ, \angle C=85^\circ$ で、内角の和は 340° となります。



大雑把に言って 「開いた三角形」は偽球の尖塔を内部に含み、「閉じた三角形」は含みません。

例2. $A_0(2i), B_0(7+i), C_0(8+2i)$ です. $\triangle ABC$ は「閉じた三角形」ですが, 線分 AB と AC は尖塔を一周しています. しかし, この場合でも 双曲三角比は成り立ち, かつ, H^+ の双曲的角度や双曲的長さは, 偽球上のユークリッド角度や長さとして測ることができます.

$\angle A_0 = 5^\circ, \angle B_0 = 42^\circ, \angle C_0 = 90^\circ$ ですが, 偽球でもそのように見えます.



3-4-2. Mathematica による検証

第2節と同じファイルです. 三角形 ABC とあるのが「閉じた三角形」で, 三角形 $ABCC$ とあるのが「開いた三角形」です. 簡単のため, C_0 と C_1 の差は 2π に固定しています.

[triangle.nbp](#)

上のファイルの点 A, B, C の動く変域を「 $-2\pi \leq x \leq 4\pi$ 」に拡大したものです.

[wide_triangle.nbp](#)