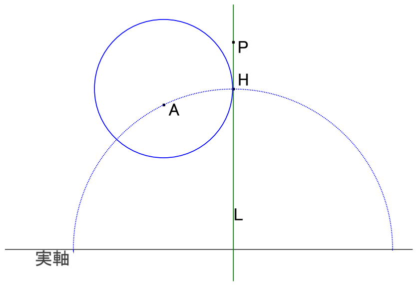
9. 等距離線

9.0. (準備) 点と直線の距離

双曲的直線上Lの点Pと，L外の1点Aとの双曲的距離は，双曲的直線PAがLと垂直なとき（AからLに下ろした垂線の足HとPが一致するとき），最小となります．



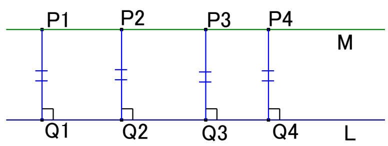
これは，Aが中心でLと接する双曲的円を描くと明らか(右図)ですが，ユークリッド幾何的な説明も可能です.(proof 1)

また，最短距離 [A,H]を「点AとLの双曲的距離」とします．

9.1. 等距離線の定義

Lを双曲的直線，点PをL外の1点とします．「PからLまでの双曲的距離を一定に保ちながら，Pが連続的に移動した時の Pの軌跡」をLからの等距離線と言います．下図でLを双曲的直線とした時， Mが等距離線です．直感的には，真っ直ぐな棒を直線Lと直交させながら その一端をL上でスライドさせたとき，棒のもう一方の端の描く軌跡です．また， LをMの基線と言います．

[等距離線のイメージ]



ユークリッド平面では，Lからの等距離線はLと平行な直線です．しかし，H+では，等距離線は双曲的直線にはなりません.

9.2. 等距離線の二つの形

9.2.1. 実軸と斜交する直線

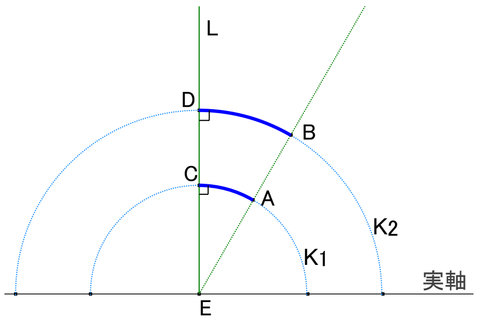
L が実軸に垂直な双曲的直線の時，L 外の異なる２点 A，B から L に垂線の足 C，D を下ろします．

このとき，L と実軸の交点を E とすると，A と C，B と D は共に点 E を中心とする同心円 K_1, K_2

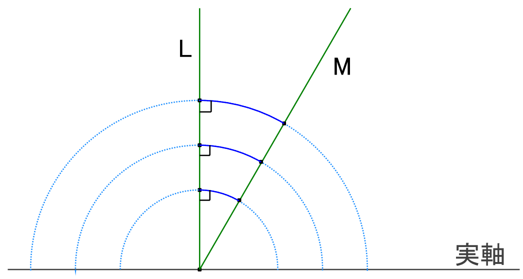
上に有ります．よって「E を中心とする適当な相似変換 f 」で弧 AC は，K_2 上の弧に移りますが，

f は双曲的合同変換 (2.3) なので，[A,C]=[B,D]のとき，B は半直線 AE と K_2 の交点になります．

すなわち，L が実軸に垂直な双曲的直線の時，等距離線は「実軸に斜交する直線」です．



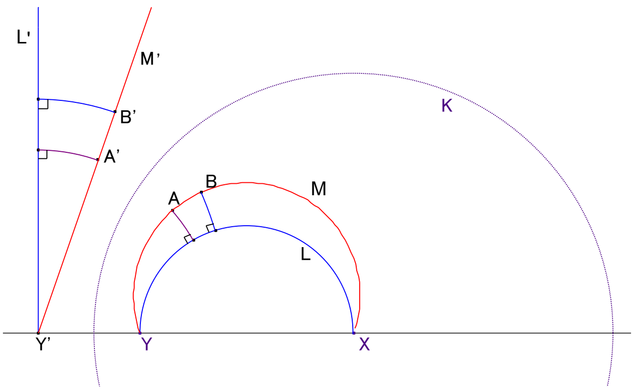
[A,C]=[B,D]ならば，A,E,B は同一直線上にある



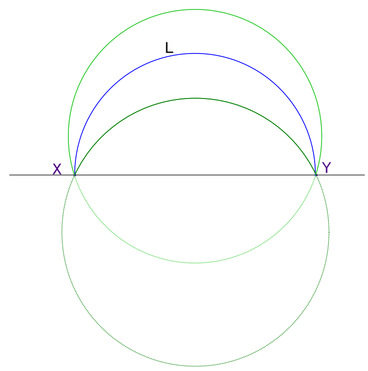
実軸に斜交する直線 M は L からの等距離線

9.2.1. 実軸と交わるが，中心が実軸上にない円

L を中心が実軸上にある円 (無限遠点 X,Y) , M を L からの等距離線, K を中心が X の円とします．
K に関する鏡像で，L は実軸に直交する直線 L' に移ります．よって L' の等距離線 M' は「実軸に斜交する直線」となります．そして M' を K に関する鏡像で戻すと，M は「中心が実軸上に無い円」となります．即ち，L が実軸上に中心を持つ円の時，L の等距離線は「実軸と交わるが中心が実軸上にない円」（無限遠点は L と共有）です．



L の等距離線は，実軸と２点で交わるが中心が実軸上にない円



L の等距離線は L の両側に作ることができる

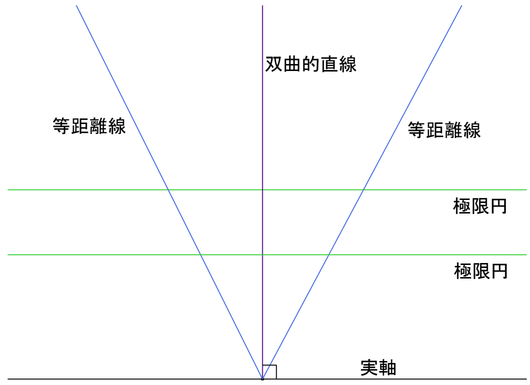
9.2.1.1 CabriⅡによる検証

A,B,K を drag して下さい．　example.html

9.3. 双曲的直線，極限円，等距離線，双曲的円の比較

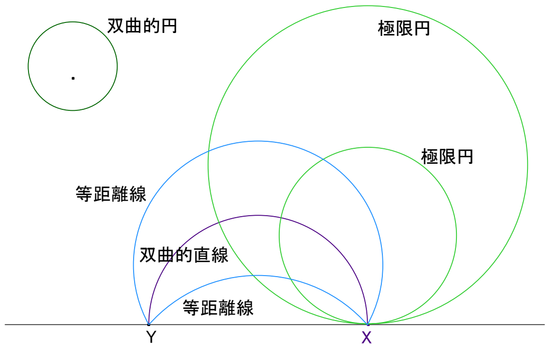
まとめると次のようになります.

実軸に直交する直線は双曲的直線,
実軸に平行な直線は極限円,
実軸と斜交する直線は等距離線



実軸に中心を持つ円は双曲的直線,
実軸に接する円は極限円,
実軸と交わるが中心が実軸上にない円は等距離線

また，実軸と共有点のない円は，双曲的円です.



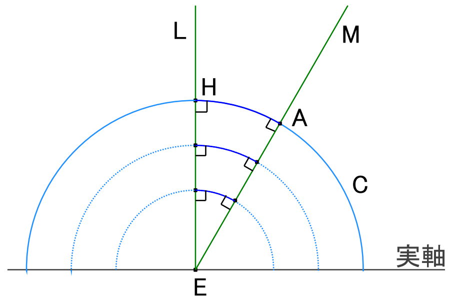
9.3.1. Cabri II による検証

右側の円群（双曲的直線，極限円，等距離線）は，左側の直線群（双曲的直線，極限円，等距離線）を，「中心が X の円 K に関する鏡像」で移したものです． 2 点 A, B と無限遠点 X, 並びに円 K と二つの等距離線を Drag して下さい． comparison.html

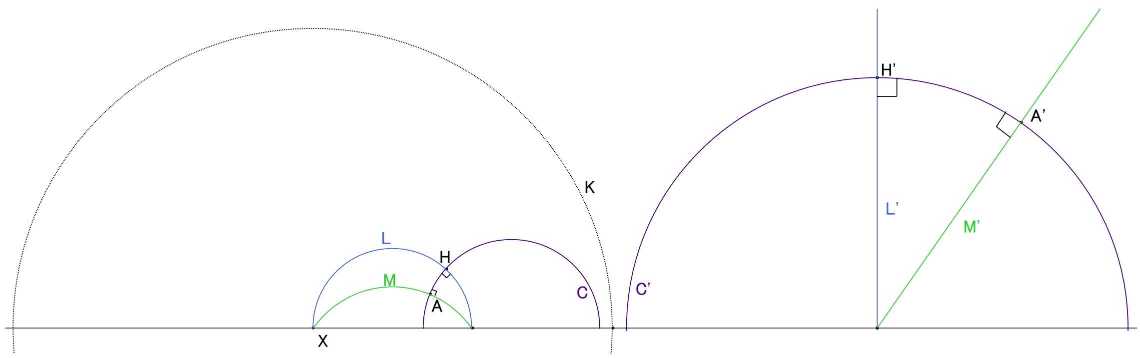
9.4. 等距離線の性質

9.4.1. 等距離線 M は，その基線 L に垂直な双曲的直線 C と垂直になる

L が実軸に垂直な直線のとき，L と実軸の交点を E，M 上の点 A から L に下ろした垂線の足を H とすると，A と H は E を中心とする円 C 上にあります．よって，点 A においても C⊥M です．
（定義より，AH⊥L は明らかですが，AH⊥M も成り立つのがポイントです．）

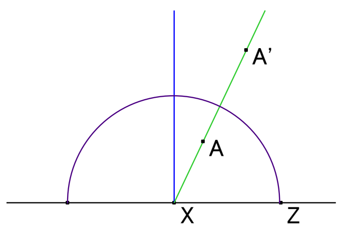


L が実軸上に中心を持つ円の場合も，L の無限遠点 X を中心とする円 K に関する鏡像を考えると，やはり C⊥M です． 以上のことは，ユークリッド幾何的に証明することもできます．（proof_2）

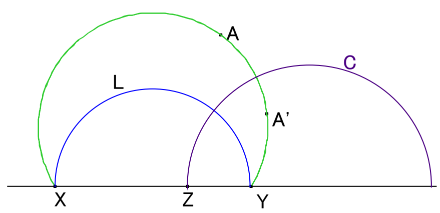


9.4.2. 双曲的直線 L に垂直な双曲的直線を C， L 外の 1 点 A の C に関する鏡像を A'とする．C が L に垂直な双曲的直線を全て表す様に変化する時，A'の軌跡は L からの等距離線となる．

L が実軸に垂直な直線のときは明らかで，従って，一般の場合でも 成り立ちます．



L が実軸に垂直な直線のとき



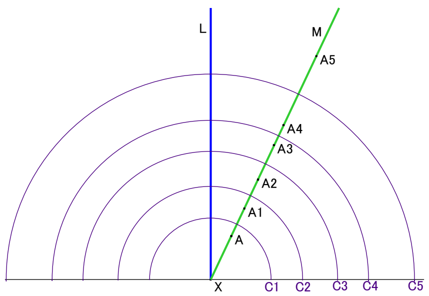
L が実軸に中心を持つ円のとき

9.4.2.1. Cabri II による検証

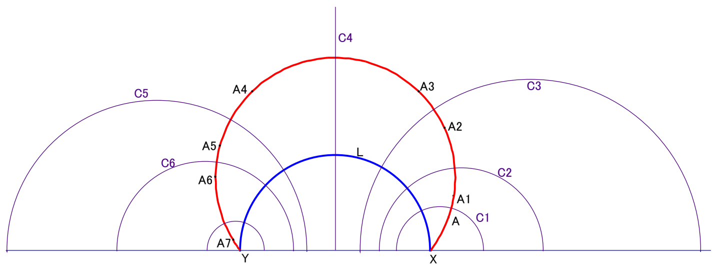
A, Z を drag して下さい． making_a_line1.html， making_a_line2.html

次の 9.4.3. は 9.4.2.と 本質的に同じです.

9.4.3. 双曲的直線 L に垂直な双曲的直線の集合を $\{C_k\}$, L 外の点 A の C_1 に関する鏡像を A_1, A_1 の C_2 に関する鏡像を A_2, ・・・のようにして点列 $\{A_k\}$ を作ると, これらの点は全て同一の L からの等距離線 M 上に在る. つまり上手に $\{C_k\}$ を選ぶと, A の軌道が M となります.



L が実軸に垂直な直線のとき



L が実軸に中心を持つ円のとき

9.4.3.1. Cabri II による検証

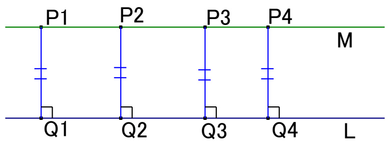
A と C_k (L 上の黒い点) を drag して下さい.　　making_a_line3.html, making_a_line4.html

9.4.4. 双曲的直線 L が実軸に中心を持つ円(実軸との交点 X,Y), L に垂直な双曲的直線を C, C 上の任意の点を P とすると, XP : YP は一定. 即ち C は X,Y からの距離の比が等しい点の軌跡 (アポロニウスの円) となる.

右上(9.4.3.の図) をご覧ください. L に垂直な双曲的直線の集合 $\{C_k\}$ は, 全て固定点が X,Y のアポロニウスの円 (XP:YP の比の値が違うだけ) となっています. なお, 証明は 7.3.3. と同じです. (後で, もっと一般的な証明もします.)

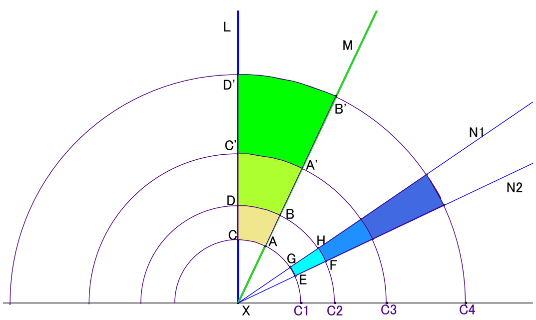
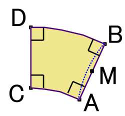
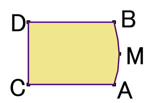
9.5. 等距離線と合同図形

「真っ直ぐな棒を直線 L と直交させながら その一端を L 上でスライドさせたとき，棒のもう一方の端の描く軌跡」が，「現実の世界」での等距離線の描き方ですが，9.4.3.の性質を利用して，等距離線を描くこともできます.



Lが双曲的直線，M が L からの等距離線のとき，M 上に 2 点 A,B をとり，A,B から L に下ろした垂線の足を C,D とし，四角形 ABCD を下図のように作ります．この四角形の 3 辺 AC,BD,CD は双曲的線分，しかし，辺 AB は等距離線の一部で，4 つの角は全て直角です.

【注】H^+ では，四角形の内角和は$360°$ より小さくなる（後述）ので，4辺を双曲的直線にすることはできません.

 	 	
四角形 ABCD と合同な四角形を，直線 L と同じ方向に積み重ねると，等距離線 M ができる.	点線は双曲的直線. 実線は等距離線. [A,B]が小さい時は，この 2 つは，ほぼ一致する.	左の四角形を，ユークリッド平面上で無理に描いた図．等距離線 AB は，線分 AB と一致しない.

この四角形 ABCD を，辺 BD に関し折り返して，四角形 A'C'DB を作ります．次に，この四角形を辺 A'C' に関し折り返し，四角形 A'B'D'C' を作ります. これを繰り返すと，辺 AB，BA'，A'B'… ができます．これを繋げると，等距離線 M が正確に作図できます.

本当は，辺 AB は等距離線でなく双曲的直線を使うべきです.（等距離線を描きたいのに，等距離線を使うのはおかしい!）[A,B]が非常に小さい時は，∠A ,∠B をほぼ直角にすることができます． また[A,B]が非常に小さければ，双曲的線分 AB は，等距離線 AB と非常に近くなるので．ほぼ正確に等距離線が描けます．　即ち，一組の対辺が短い合同な「偽長方形」を，短い辺と垂直な向きに積

んでいくと，等距離線が近似的に描けます.　　そして,この描き方は,「真っ直ぐな棒を直線 L と直交させながら その一端を L 上でスライドさせたとき，棒のもう一方の端の描く軌跡」と言うのを厳密に表しただけです.