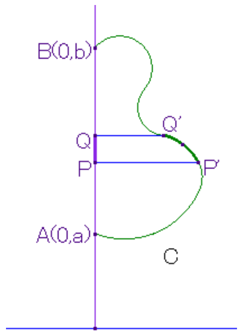
3. 双曲的直線

２点 A, B を両端とする曲線 C の内, C に沿って測った A, B 間の双曲的距離が最小の曲線 (**測地線**) を,　双曲的線分 AB と定義します.

3.1.　点 A, B が実軸に垂直な直線上にあるとき

A,B を通る任意の曲線を C とします.　線分 AB 上に，非常に近い 2 点 P, Q をとり，P, Q を通り実軸と平行な直線と C の交点を 各々 P',Q'とすると,「C に沿った P, Q 間の距離」は,「直線 PQ に沿った的距離」より大きいから,



$$\overline{\mathrm{PQ}} \le (\mathrm{P'},\mathrm{Q'})_c$$

上の式で，距離はユークリッド的です．P, Q の y 成分はほぼ等しいので，それらを y とおくと双曲的にも，同じ大小関係が成り立ちます.

$$[\mathrm{P},\mathrm{Q}]=\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{y} \le \frac{(\mathrm{P'},\mathrm{Q'})_\mathrm{C}}{y}=[\mathrm{P'},\mathrm{Q'}]_\mathrm{C}$$

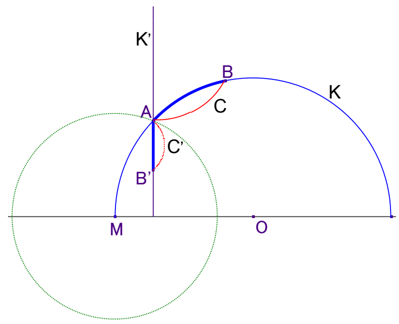
即ち「C に沿った P, Q 間の双曲的距離」は,「直線 PQ に沿った P, Q 間の双曲的距離」より大きい.

ゆえに,　2 点 A,B を結ぶ双曲的線分は, ユークリッド的線分 AB です.　…(*)

また,　$\mathrm{A}(0,a)$ と $\mathrm{B}(0,b)$ を結ぶ線分の双曲的長さは $[\mathrm{A},\mathrm{B}]=\int_a^b \frac{dy}{y}=\log\left|\frac{b}{a}\right|$ となります.（1-2）

3.2　点 A, B が実軸に垂直な同一直線上にないとき

中心が実軸上にあり A, B を通る円を K, K と実軸の交点の 1 つを M とし, M を中心とし A を通る円を描きます. この円に関する鏡像 f によって, K は点 A を通り実軸に垂直な直線 K' に移ります. さらに f による B の像を B' とすると, f は双曲的移動だから「K に沿った A と B の双曲的距離」と「K' に沿った A と B' の双曲的距離」は等しいです. 即ち,



$$[\mathrm{A,B}]_{\mathrm{K}} = [\mathrm{A,B'}]_{\mathrm{K'}}$$

A,B を通る任意の曲線 C の f による像を C' とすると, 同様に,

$$[\mathrm{A,B}]_{C} = [\mathrm{A,B'}]_{C'}$$

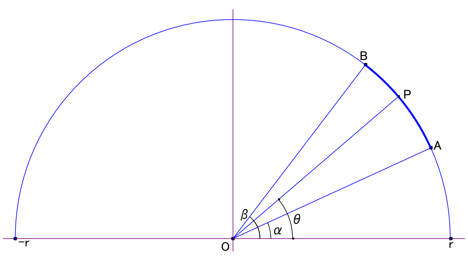
故に, 曲線 C が円 K 上の弧でないなら, 3.1(*) より,

$$[\mathrm{A,B}]_{\mathrm{K}} = [\mathrm{A,B'}]_{\mathrm{K'}} < [\mathrm{A,B'}]_{\mathrm{C'}} = [\mathrm{A,B}]_{\mathrm{C}}$$

よって, 2 点 A, B を結ぶ双曲的線分は 円 K 上の弧 AB と一致します.

また $\mathrm{A}(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$, $\mathrm{B}(r\cos\beta, r\sin\beta)$ を結ぶ双曲的線分の長さは,

$$[\mathrm{A,B}] = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|dz|}{y} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r\,\mathrm{d}\theta}{r\,\sin\theta} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta} = \log\left|\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\beta}{2}}\right|$$



となります. (1.2)

【注】直線と比べて, **上に凸の曲線の方が双曲的距離が短くなる**のは, y 成分の大きい方が $ds = \dfrac{|dz|}{y}$ が小さくなることからも明らかです. 蜃気楼などの「光の屈折の原理」と同様です.

Cabri II による検証　（2 点 A,B を結ぶ双曲的線分）

2 点 A, B を通る円 C の中心は実軸上にあります. 円 C に沿って測った双曲的距離 $l = [\mathrm{A,B}]_{\text{円弧}}$ と,

折れ線 AP+PQ+QB に沿った双曲的距離: $l' = [\mathrm{A,P}]_{\text{線分AP}} + [\mathrm{P,Q}]_{\text{線分PQ}} + [\mathrm{Q,B}]_{\text{線分QB}}$ を比べます.

P, Q を Drag して l' ができるだけ小さくなるようにして下さい.　　geodetic_line.html

3-3　双曲的直線

「実軸は無限遠の集まり」(1.2) なので，双曲的線分は両側にいくらでも長く延長できます．これを **双曲的直線** といいます．以上から 双曲的直線は，

実軸と直交する直線，または 実軸上に中心を持つ半円

となる事が分かりました．