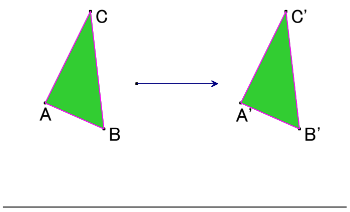
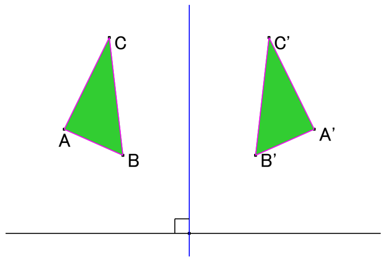
2.　双曲的移動の例

曲線の双曲的長さを変えない変換を，**双曲的移動**といいます．双曲的移動により，互いに移る図形は，**双曲的合同**といいます．以下，単に「移動」や「変換」と書けば，「ユークリッド的移動」を表すものとします．以下は，ポアンカレ上半平面(H^+)に於ける双曲的移動の一例です．

2.1 実軸に平行な方向への平行移動
2.2 実軸に垂直な直線に関する鏡像(対称移動)

これらはy成分を変えないので，共に双曲的移動となります．（下図）





2.3. 実軸上の点を相似の中心とする，相似比が正の相似変換

実軸上の点Aを相似の中心とし, 相似比kの変換を f とします.

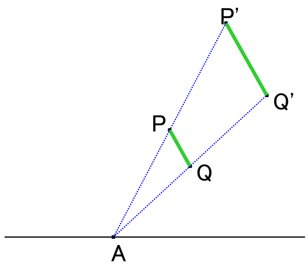
P,Qの距離が非常に近いとき, 2点P, Qの双曲的距離は,

$$[P,Q]=\frac{\overline{PQ}}{\text{Pの}y\text{成分}}$$

P,Q のf による像をそれぞれ P',Q'とすると

$$[P',Q']=\frac{\overline{P'Q'}}{\text{P'の}y\text{成分}}=\frac{k\cdot\overline{PQ}}{k\cdot(\text{Pのy成分})}=\frac{\overline{PQ}}{\text{Pの}y\text{成分}}$$

$$\therefore [P,Q]=[P',Q']$$



上の等式の誤差は$\overline{PQ}$より高位の微小量なので　P と Q の間を細分して集めれば, P と Q が離れている場合にも成り立ちます．即ち，　P と Q を結ぶ曲線を$C:(x(t),y(t))$ $(\alpha\le t\le\beta)$ とすると,

$$[P,Q]_c=\int_\alpha^\beta\frac{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}{y(t)}dt \qquad \text{（但し } x'(t)=\frac{dx}{dt},\ y'(t)=\frac{dy}{dt}\text{）}$$

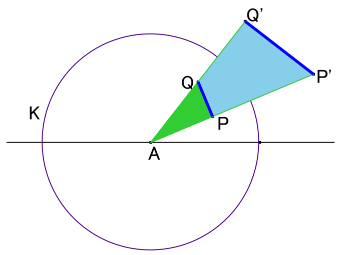
$$[P',Q']_{c'}=\int_\alpha^\beta\frac{\sqrt{(kx'(t))^2+(ky'(t))^2}}{ky(t)}dt=\int_\alpha^\beta\frac{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}{y(t)}dt$$

ゆえに，　$[P',Q']_{c'}=[P,Q]_c$

2.4. 実軸上の点を中心とする円に関する鏡像(反転)

実軸上の点Aを中心とする半径Rの円をK, H+上の2点を P, Q, また P, Q の円Kに関する鏡像（反転）を P', Q'とします．鏡像の定義より，

$$\mathrm{AP}\times\mathrm{AP'}=\mathrm{AQ}\times\mathrm{AQ'}=\mathrm{R}^2.\quad ゆえに\ \mathrm{AP}:\mathrm{AQ}=\mathrm{AQ'}:\mathrm{AP'}$$



よって，「2辺の比と挟角相等」で，

$$\triangle\mathrm{APQ}\backsim\triangle\mathrm{AQ'P'}$$

ゆえに P, Q が非常に近い時，「**原点を相似の中心とする相似変換**」と同様に，

$$[\mathrm{P},\mathrm{Q}]=[\mathrm{P'},\mathrm{Q'}]$$

上の等式の誤差は $\overline{\mathrm{PQ}}$ より高位の微小量なので P と Q の間を細分して集めれば P と Q が離れている場合にも成り立ちます．

即ち，P と Q を結ぶ適当な曲線 C 上の点を $\mathrm{R}(x(t),y(t))\ (\alpha\le t\le\beta)$，その像を $\mathrm{R'}(X(t),Y(t))\ (\alpha\le t\le\beta)$，さらに簡単の為，K を単位円とします．鏡像の定義より

$$X=\frac{x}{x^2+y^2},\ Y=\frac{y}{x^2+y^2}$$

$\dfrac{dX}{dt}=X'(t)$ と表すと，

$$X'(t)=\left(\frac{x(t)}{x(t)^2+y(t)^2}\right)'=\frac{x'(t)(x(t)^2+y(t)^2)-x(t)(2x(t)\cdot x'(t)+2y(t)\cdot y'(t))}{(x(t)^2+y(t)^2)^2}$$

$$=\frac{x'(t)(-x(t)^2+y(t)^2)-2x(t)y(t)y'(t)}{(x(t)^2+y(t)^2)^2}$$

同様に，
$$Y'(t)=\frac{y'(t)(x(t)^2-y(t)^2)-2x(t)y(t)x'(t)}{(x(t)^2+y(t)^2)^2}$$

単純計算により，　$X'(t)^2+Y'(t)^2=\dfrac{x'(t)^2+y'(t)^2}{(x(t)^2+y(t)^2)^2}$

したがって，

$$[\mathrm{P}',\mathrm{Q}']_{C'}=\int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{X'(t)^2+Y'(t)^2}}{Y}dt=\int_\alpha^\beta \frac{x^2+y^2}{y}\cdot\frac{\sqrt{x(t)^2+y'(t)^2}}{x^2+y^2}dt=\int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{x(t)^2+y'(t)^2}}{y}dt=[\mathrm{P},\mathrm{Q}]_C$$

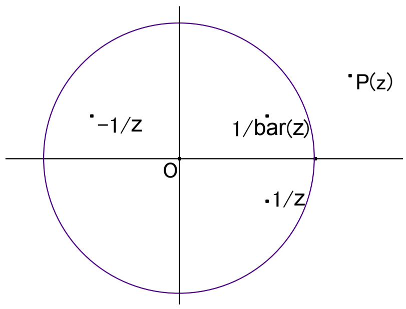
2.4.1. Cabri II による検証

P,Q を Drag して下さい.　similar_transformation&isometric.html

【注】「鏡像変換（反転）」に関して，詳しい説明は「**補充Ⅰ**」にあります.

2.5. (2.6 の準備）変換式が $\omega=-\dfrac{1}{z}$ で与えられるとき

この変換は「**単位円に関する鏡像(2.4)**」と「**虚軸に関する対称移動(2.2)**」の合成だから， 双曲的距離を保存します.



2.6. 実数係数の一次分数変換（ただし$ad-bc>0$）

ここで言う１次分数変換とは，変換式が下のようになるものです.

$$\omega=\frac{az+b}{cz+d}\ \ (a,b,c,d\ は実数で\ ad-bc>0)$$

(i)　$c=0$　とすると,

$$\omega=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$$

「$ad-bc=ad>0$　より　$\dfrac{a}{d}>0$」だから，実軸に平行な移動(2.1)と 相似比が正の相似変換(2.3)との合成になり，双曲的移動となります.

(ii) $c\neq 0$ のとき

$$\omega=\frac{a}{c}-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{ad-bc}{z+\dfrac{d}{c}}$$

$ad-bc>0$　だから, 実軸に平行な移動(2.1)と相似比が正の相似変換(2.3)と「$\omega=-\dfrac{1}{z}$ の変換(2.5)」の合成となり，この場合も双曲的移動となります.（Q.E.D.）

2.7. 双曲的合同変換の原子と分子

第 3 節で，「実軸に垂直な直線」と「実軸上の点を中心とする円」の二つが，双曲的直線であることを言います．すると，「実軸に垂直な直線に関する鏡像(2.2)」と「実軸上の点を中心とする円に関する鏡像（2.4)」の２つは，「双曲的直線に関する鏡像（∗)」として，１つにまとまります．

さらに，「双曲的合同変換（図形の向きを変える変換も含めて）は，双曲的直線に関する鏡像(∗)だけで合成できる」こと．「図形の向きを変えない 双曲的合同変換は，全て 1 次分数変換 で表せる」ことも第 7 節で説明します．

例えば，「2.3. 実軸上の点 A を相似の中心とする，相似比が正の相似変換」は，「点 A を中心とする２つの同心円に関する鏡像変換の合成」で表されます．

similar_transformation&inverse_transformation.html

これは，ユークリッド平面で，平行移動や，回転移動などの合同変換が全て，「直線に関する対称移動の合成」で表されることに対応しています．

symmetric_transformation&pararell_transformation.html

symmetric_transformation&rotation(Euclid).html

この意味で，「1 次分数変換は，双曲的移動の分子」，「鏡像変換は，双曲的移動の原子」です．