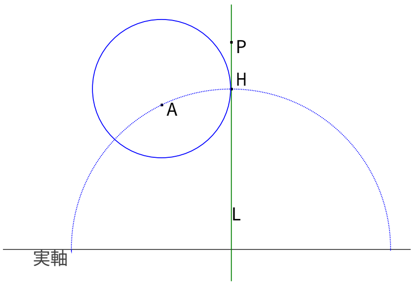
10. 等距離線

(準備) 点と直線の距離

双曲的直線上 L の点 P と，L 外の 1 点 A との双曲的距離は，双曲的直線 PA が L と垂直なとき（A から L に下ろした垂線の足 H と P が一致するとき），最小となります．



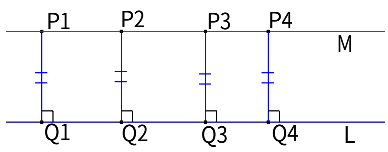
これは, A が中心で L と接する双曲的円を描くと明らか（右図）ですが，ユークリッド幾何的な説明も可能です.(proof 1)

また，最短距離 [A,H]を「点 A と L の双曲的距離」とします．

10.1. 等距離線の定義

L を双曲的直線，点 P を L 外の 1 点とします．「**P から L までの双曲的距離を一定に保ちながら，P が連続的に移動した時の P の軌跡**」を L からの**等距離線**と言います．下図で L を双曲的直線とした時， M が等距離線です．直感的には，「真っ直ぐな棒を直線 L と直交させながら その一端を L 上でスライドさせたとき, 棒のもう一方の端の描く軌跡」です．また L を M の**基線**と言います．

[等距離線のイメージ]



ユークリッド平面では，L からの等距離線は L と平行な直線です．しかし，H+では, 等距離線は双曲的直線にはなりません.

10.2.　等距離線の二つの形

10.2.1. 実軸と斜交する直線

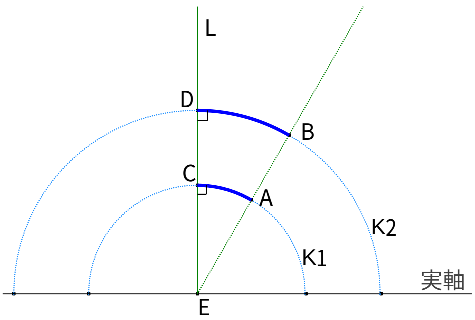
L が実軸に垂直な双曲的直線の時，L 外の異なる 2 点 A，B から L に垂線の足 C，D を下ろします．

このとき，L と実軸の交点を E とすると，A と C，B と D は共に点 E を中心とする同心円 K_1, K_2

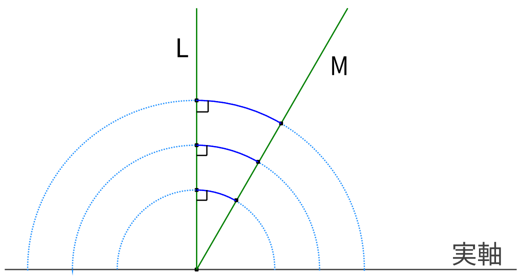
上に有ります．よって「E を中心とする適当な相似変換 f 」で弧 AC は，K_2 上の弧に移りますが，

f は双曲的合同変換 (2.3) なので，[A,C]=[B,D]のとき，B は半直線 AE と K_2 の交点になります．

すなわち，L が実軸に垂直な双曲的直線の時，等距離線は「実軸に斜交する直線」です．



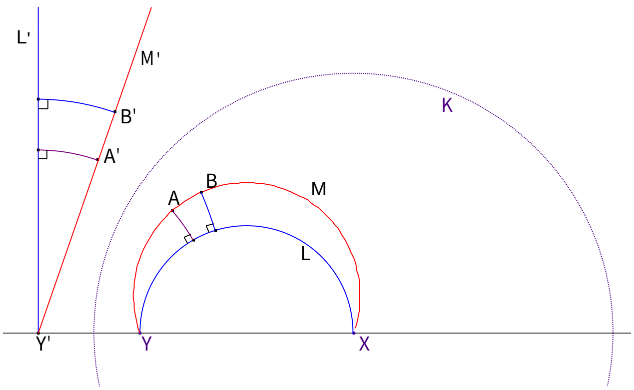
[A,C]=[B,D]ならば，A,E,B は同一直線上にある



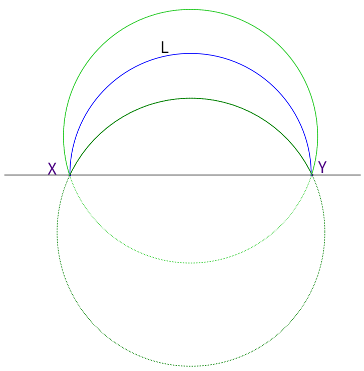
実軸に斜交する直線 M は L からの等距離線

10.2.1. 実軸と交わるが，中心が実軸上にない円

Lを中心が実軸上にある円（無限遠点 X,Y），M を L からの等距離線，K を中心が X の円とします．K に関する鏡像で，L は実軸に直交する直線L' に移ります．よって L' の等距離線 M' は「実軸に斜交する直線」となります．そして M' を K に関する鏡像で戻すと，M は「中心が実軸上に無い円」となります．即ち，L が実軸上に中心を持つ円の時，L の等距離線は「実軸と交わるが中心が実軸上にない円」 (無限遠点は L と共有) です．



L の等距離線は，実軸と 2 点で交わるが中心が実軸上にない円



L の等距離線は L の両側に作ることができる

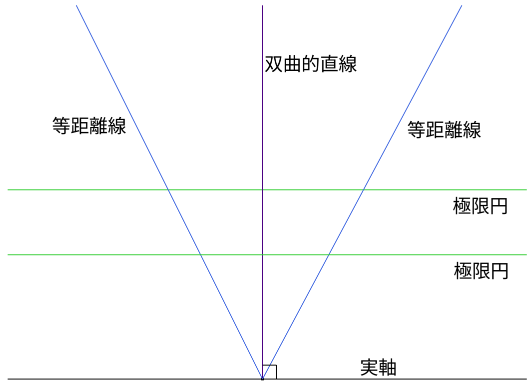
10.2.1.1　CabriⅡによる検証

A,B,K を drag して下さい．　example.html

10.3. 双曲的直線，極限円，等距離線，双曲的円の比較

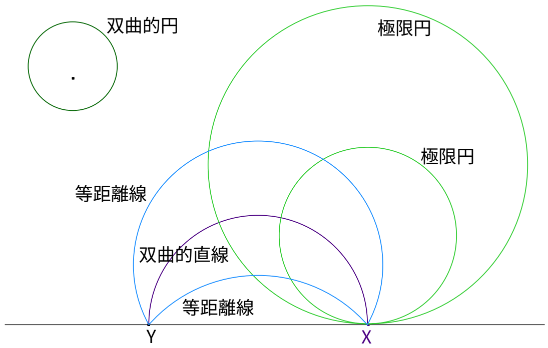
まとめると次のようになります.

実軸に直交する直線は双曲的直線,
実軸に平行な直線は極限円,
実軸と斜交する直線は等距離線



実軸に中心を持つ円は双曲的直線,
実軸に接する円は極限円,
実軸と交わるが中心が実軸上にない円は等距離線

また，実軸と共有点のない円は，双曲的円です.



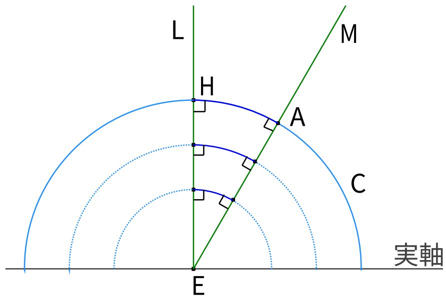
10.3.1. CabriⅡによる検証

右側の円群（双曲的直線，極限円，等距離線）は，左側の直線群（双曲的直線，極限円，等距離線）を，「中心が X の円 K に関する鏡像」で移したものです． 2 点 A, B と無限遠点 X，並びに円 K と二つの等距離線を Drag して下さい． [comparison.html]

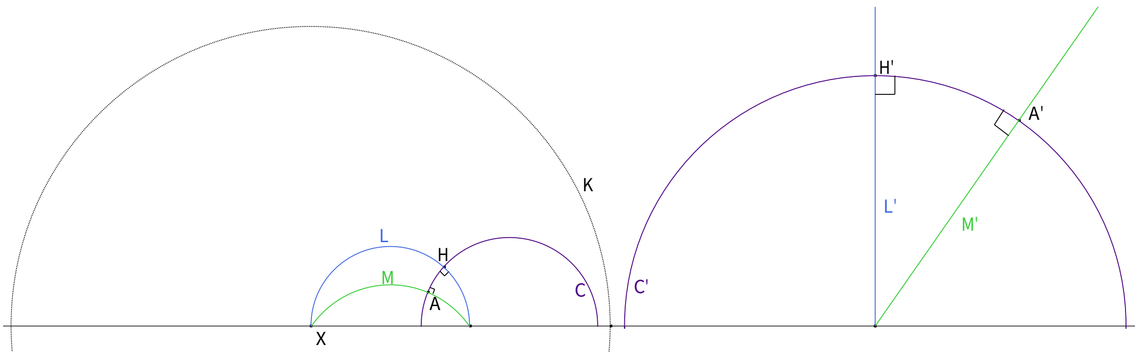
10.4.　等距離線の性質

10.4.1. 等距離線 M は，その基線 L に垂直な双曲的直線 C と垂直になる

L が実軸に垂直な直線のとき，L と実軸の交点を E，M 上の点 A から L に下ろした垂線の足を H とすると，A と H は E を中心とする円 C 上にあります．よって，点 A においても C⊥M です．
（定義より，AH⊥L は明らかですが，AH⊥M も成り立つのがポイントです.）

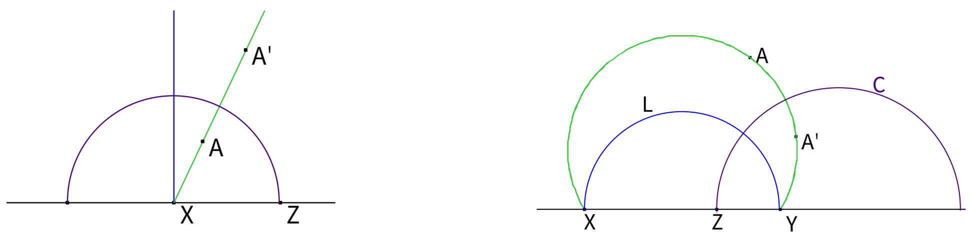


L が実軸上に中心を持つ円の場合も，L の無限遠点 X を中心とする円 K に関する鏡像を考えると，やはり C⊥M です．　以上のことは，ユークリッド幾何的に証明することもできます．(proof_2)



10.4.2. 双曲的直線 L に垂直な双曲的直線を C，　L 外の１点 A の C に関する鏡像を A'とする．C が L に垂直な双曲的直線を全て表す様に変化する時，A'の軌跡は L からの等距離線となる．

L が実軸に垂直な直線のときは明らかで，従って，一般の場合でも 成り立ちます．



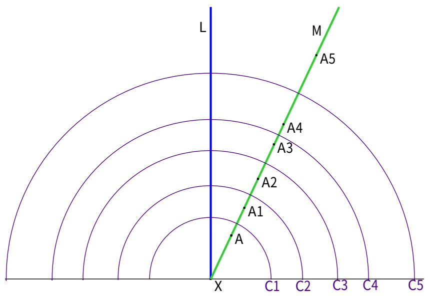
L が実軸に垂直な直線のとき　　　　L が実軸に中心を持つ円のとき

10.4.2.1. Cabri II による検証

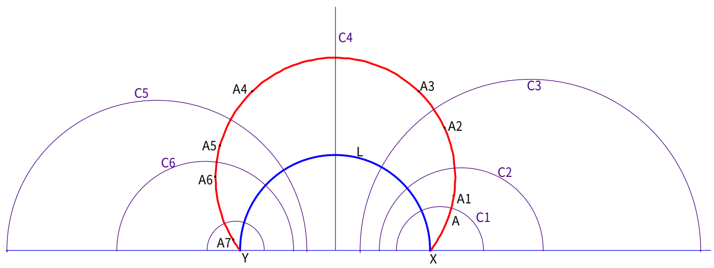
A, Z を drag して下さい.　making_a_line1.html,　making_a_line2.html

次の 10.4.3. は 10.4.2.と 本質的に同じです.

10.4.3. 双曲的直線 L に垂直な双曲的直線の集合を {C_k}，L 外の点 A の C_1 に関する鏡像を A_1, A_1 の C_2 に関する鏡像を A_2, ･･･のようにして点列 {A_k} を作ると, これらの点は全て同一の L からの等距離線 M 上に在る. つまり上手に {C_k} を選ぶと, A の軌道が M となります.



L が実軸に垂直な直線のとき



L が実軸に中心を持つ円のとき

10.4.3.1. CabriⅡによる検証

A と C_k (L 上の黒い点) を drag して下さい. making_a_line3.html, making_a_line4.html

10.4.4. 双曲的直線 L が実軸に中心を持つ円(実軸との交点 X,Y), L に垂直な双曲的直線を C, C 上の任意の点を P とすると, XP : YP は一定. 即ち C は X,Y からの距離の比が等しい点の軌跡（アポロニウスの円）となる.

右上(10.4.3.の図) をご覧ください. Lに垂直な双曲的直線の集合{C_k}は, 全て固定点が X,Y のアポロニウスの円（XP:YP の比の値が違うだけ）となっています. なお, 証明は 7.3.3. と同じです.
（後で, もっと一般的な証明もします.）