ポアンカレ上半平面(H^+)

複素数平面の上半分に，以下の様に長さ，角などを定義し，ポアンカレ上半平面(H^+)と呼びます．

1. 曲線の長さ

1-1. 定義

H^+上の曲線 $C: z(t) = x(t) + iy(t)\ (a \le t \le b)$ の双曲的長さ s を次のように定義します．

$$s = \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt$$

一方，H^+を複素数平面としてみた場合，ユークリッド的長さ l は，

$$l = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

ですから，

ユークリッド的微小距離 $|dz| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$ と，双曲的微小距離 $ds = \dfrac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt$ の

間には，次の関係があります．

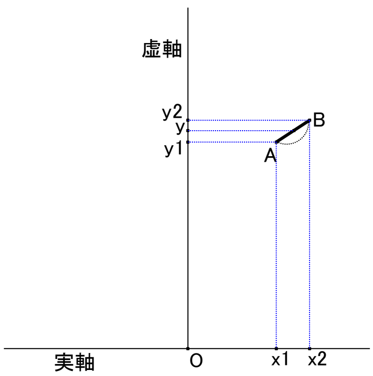
$$\boxed{ds = \frac{|dz|}{y} \qquad (\text{誤差は}|dz|\text{より高位の微少量})\cdots(*)}$$

$A(x_1 + iy_1), B(x_2 + iy_2)$ のとき，ユークリッド的距離は，

$$|dz| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

A と B が非常に近い時，双曲的距離は

$$ds \fallingdotseq \frac{|dz|}{y_1} \fallingdotseq \frac{|dz|}{y_2} \fallingdotseq \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{y}$$



1-1-1. Cabri II による検証

A, B を Drag してください． (hyperbolicDistance.html)

以下，2点A, Bが曲線C上にあるとします．この時 「Cに沿った双曲的長さ」を$[\mathrm{A,B}]_c$，特に，Cが 双曲的直線の場合は 単に A, B の「双曲的距離」と言い [A,B]と書くことにします．さらにA, Bの 「Cに沿ったユークリッド的長さ」を$(\mathrm{A,B})_c$，特に，Cがユークリッド的直線の場合は，単にA, Bの「距離」と言い $\overline{\mathrm{AB}}$ と書くことにします．また， 単に「線分，円，弧」などと言えば，「ユークリッド的線分，円，弧」などを表すものとします．（これらは全て ここだけの約束です.）

1-2. 色々な曲線に沿って測った双曲的長さ

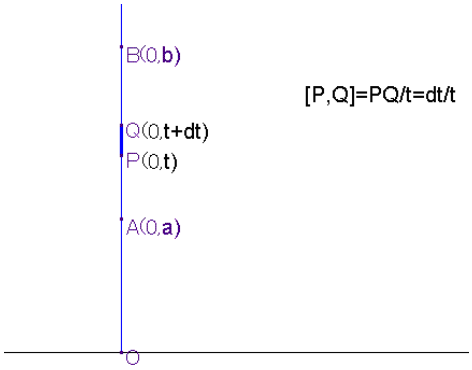
例 1: 実軸に垂直な線分の双曲的長さ.

$\mathrm{A}(x+ia), \mathrm{B}(x+ib)$ $(0<a\le b)$ とすると，線分ABの双曲的距離は，

$$[\mathrm{A,B}]_C=\int_a^b\frac{|dz|}{y}=\int_a^b\frac{|dt|}{t}=[\log\ t]_a^b=\log\frac{b}{a}$$

ここで，b を止めておいて 「$a\to+0$」とすると，

$$[\mathrm{A,B}]_C\to\infty$$



ゆえに，

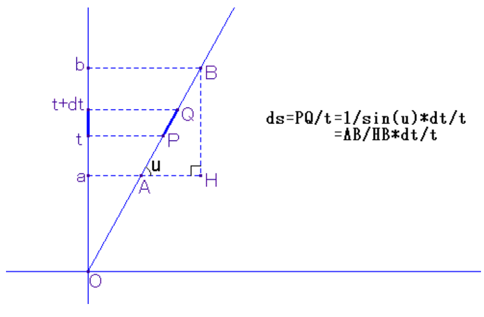
実軸は無限遠点の集まり

となります.

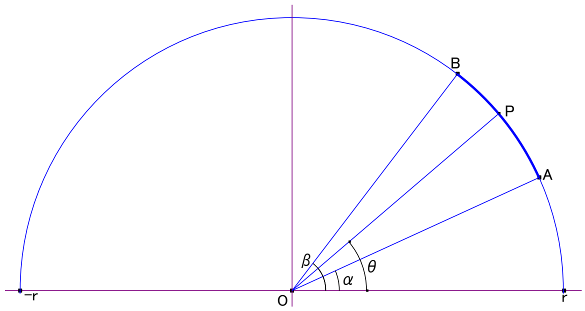
例 2: 実軸に垂直でない線分の双曲的長さ.

「実軸に垂直でない線分」の場合は，その直線と実軸のなす角を u とした時，$ds=\frac{1}{\sin(u)}\cdot\frac{dt}{t}$ となるから $\frac{dt}{t}$ に定数因子が掛かるだけです．ゆえに，

$$[\mathrm{A,B}]_C=\frac{1}{\sin u}\int_a^b\frac{|dt|}{t}=\frac{1}{\sin u}\cdot\log\frac{b}{a}$$



例 3: 実軸に中心を持つ半円上の弧の双曲的長さ.



原点中心で半径が r の円 C 上に 2 点 A, B をとり, 偏角をそれぞれ α,β $(0<\alpha\leq\beta<\pi)$ とします.
C 上の点 P(z) は, $z=r(\cos\theta+i\ \sin\theta)$ とおけます. ゆえに,

$$[\mathrm{A,B}]_{\mathrm{C}}=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{|dz|}{y}=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{r\ \mathrm{d}\theta}{r\ \sin\theta}=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}=\left[\log\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)\right]_{\alpha}^{\beta}=\log\left(\frac{\tan\frac{\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2}}\right)$$

【注】双曲的直線は「**実軸に垂直な直線**」と「**実軸に中心を持つ半円**」に限る事を 後で述べます. 従って, 上の **例 1** と**例 3** は, 双曲的最短距離の公式 となりますが, **例 2** はそうでありません.

1-2-1. Cabri II による検証

Cabri II で確認してみてください. (A, B, O, T を Drag してください.)

実軸に垂直な直線 lengh_of_lines1.html,
実軸に中心を持つ半円 lengh_of_lines2.html