

## ポアンカレ上半平面(H<sup>+</sup>)

複素数平面の上半分に、以下の様に長さ、角などを定義し、ポアンカレ上半平面(H<sup>+</sup>)と呼びます。

### 1. 曲線の長さ

#### 1-1. 定義

H<sup>+</sup>上の曲線  $C: z(t) = x(t) + iy(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ) の双曲的長さ  $s$  を次のように定義します。

$$s = \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt$$

一方、H<sup>+</sup>を複素数平面としてみた場合、ユークリッド的長さ  $l$  は、

$$l = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

ですから、

ユークリッド的微小距離  $|dz| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$  と、双曲的微小距離  $ds = \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt$  の

間には、次の関係があります。

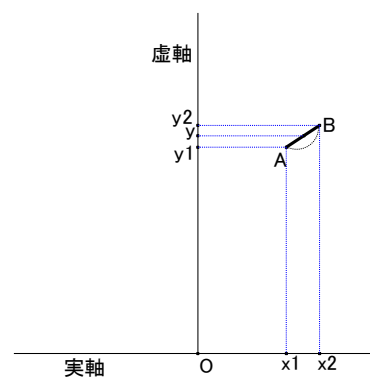
$$ds = \frac{|dz|}{y} \quad (\text{誤差は}|dz|\text{より高位の微量}) \dots (*)$$

$A(x_1 + iy_1)$ ,  $B(x_2 + iy_2)$  のとき、ユークリッド的距離は、

$$|dz| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

A と B が非常に近い時、双曲的距離は

$$ds \doteq \frac{|dz|}{y_1} \doteq \frac{|dz|}{y_2} \doteq \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{y}$$



#### 1-1-1. Cabri II による検証

A, B を Drag してください。 ([hyperbolicDistance.html](#))

以下、2点A, Bが曲線C上にあるとします. この時 「Cに沿った双曲的長さ」を $[A,B]_C$ , 特に, Cが双曲的直線の場合は単にA, Bの「双曲的距離」と言い $[A,B]$ と書くことにします. さらにA, Bの「Cに沿ったユークリッド的長さ」を $(A,B)_C$ , 特に, Cがユークリッド的直線の場合は, 単にA, Bの「距離」と言い $\overline{AB}$ と書くことにします. また, 単に「線分, 円, 弧」などと言えば, 「ユークリッド的線分, 円, 弧」などを表すものとします. (これらは全てここだけの約束です.)

## 1-2. 色々な曲線に沿って測った双曲的長さ

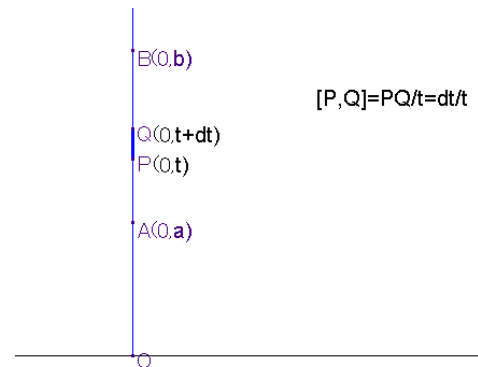
例1: 実軸に垂直な線分の双曲的長さ.

$A(x+ia), B(x+ib)$  ( $0 < a \leq b$ ) とすると, 線分ABの双曲的距離は,

$$[A,B]_C = \int_a^b \frac{|dz|}{y} = \int_a^b \frac{|dt|}{t} = [\log t]_a^b = \log \frac{b}{a}$$

ここで,  $b$  を止めておいて 「 $a \rightarrow +0$ 」 とすると,

$$[A,B]_C \rightarrow \infty$$



ゆえに,

実軸は無限遠点の集まり

となります.

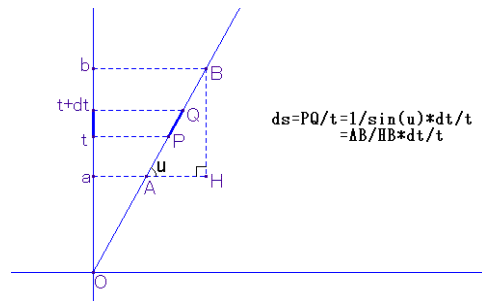
例2: 実軸に垂直でない線分の双曲的長さ.

「実軸に垂直でない線分」の場合は, その直線と実軸

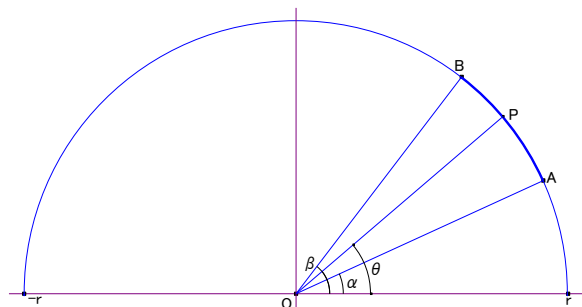
のなす角を $u$ とした時,  $ds = \frac{1}{\sin(u)} \cdot \frac{dt}{t}$  となるから

$\frac{dt}{t}$  に定数因子が掛かるだけです. ゆえに,

$$[A,B]_C = \frac{1}{\sin u} \int_a^b \frac{|dt|}{t} = \frac{1}{\sin u} \cdot \log \frac{b}{a}$$



例 3: 実軸に中心を持つ半円上の弧の双曲的長さ.



原点中心で半径が  $r$  の円  $C$  上に 2 点  $A, B$  をとり, 偏角をそれぞれ  $\alpha, \beta$  ( $0 < \alpha \leq \beta < \pi$ ) とします.  $C$  上の点  $P(z)$  は,  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  とおけます. ゆえに,

$$[A, B]_C = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|dz|}{y} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r d\theta}{r \sin \theta} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\theta}{\sin \theta} = \left[ \log \left( \tan \frac{\theta}{2} \right) \right]_{\alpha}^{\beta} = \log \left( \frac{\tan \frac{\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2}} \right)$$

**【注】** 双曲的直線は「**実軸に垂直な直線**」と「**実軸に中心を持つ半円**」に限る事を 後で述べます. 従って, 上の **例 1** と **例 3** は, 双曲的最短距離の公式 となりますが, **例 2** はそうではありません.

### 1-2-1. Cabri II による検証

Cabri II で確認してみてください. (A, B, O, T を Drag してください.)

実軸に垂直な直線 [lengh of lines1.html](#),

実軸に中心を持つ半円 [lengh of lines2.html](#)