４．空間内の４点の複比

4-1. 複比の定義

複比(double ratio)には色々あり「複素平面上の 4 点に関する複比」(1 次分数変換に関して不変)，「一直線上の 4 点に関する複比」(射影変換に関して不変) が有名です．この節では「複素平面上の複比」と同類の「空間内の 4 点の複比」を「複比」と呼びます．

ユークリッド空間に無限遠点を付け加えた空間を考え，空間内の 4 点 A,B,C,D に関し，複比 $[A,B\,|\,C,D]$を次の様に定めます．（例えば AC は A と C のユークリッド距離です.）

$$\boxed{[A,B|C,D]=\frac{\dfrac{AC}{BC}}{\dfrac{AD}{BD}}=\frac{AC\times BD}{AD\times BC}}$$

明らかに，

$$[C,D|A,B]=[A,B|C,D],\qquad [B,A|C,D]=[A,B|D,C]=\frac{1}{[A,B|C,D]}$$

さらに，これらを組み合わせて使うと，

$$\begin{cases}[A,B|C,D]=[B,A|D,C]=[C,D|A,B]=[D,C|B,A] \\ [B,A|C,D]=[A,B|D,C]=[D,C|A,B]=[C,D|B,A] \quad \left(=\dfrac{1}{[A,B\,|\,C,D]}\right)\end{cases}\cdots(*)$$

A,B,C,D を 2 個ずつの 2 組に分ける組合せは$\{A,B\}$と$\{C,D\}$，$\{A,C\}$と$\{B,D\}$，$\{A,D\}$と$\{B,C\}$の 3 通りあります．例えば $\{A,B\}$と$\{C,D\}$ の場合は，(*)の様に 8 通りの複比が作れますが，その値は 互いに逆数となる 2 種類しかありません．よって 4 点から作られる複比の取りえる値は，最大「3×2=6 種類」です．

A,B,C,D のうち 1 つが無限遠点のときも，同様に定めます．例えば A が無限遠点のとき，

$$[A,B|C,D]=\frac{AC\times BD}{AD\times BC}=\frac{BD}{BC}\quad (A=\infty\text{のとき})$$

A,B,C,D のうち二つが等しい場合も，連続性を仮定して，同様に定義できます．例えば，

$$[A,B|C,D]=\frac{AC\times BD}{AD\times BC}=1\quad (A=B,B=D\text{の時}),\ [A,B|C,D]=\frac{AC\times BD}{AD\times BC}=0\quad (A=C,B=D\text{の時})$$

4 点のうち「三つ以上が同じ場合」と「無限遠点が 2 つ以上の場合」は 定義しません．

4-2. 複比と鏡像変換

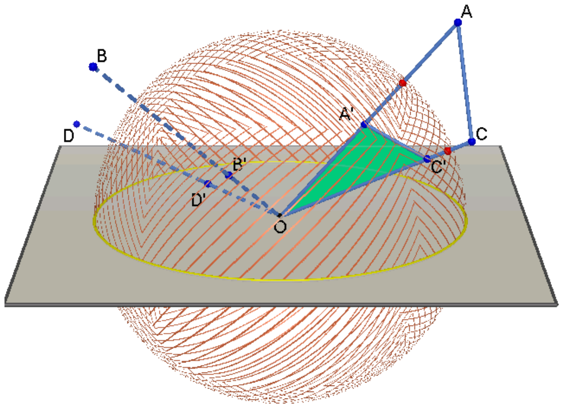
定理：複比は球に関する鏡像によって変化しません.

（但し球は「一般化された球」で，平面も含んで考えます.）

【証明】平面に関する鏡像の時は明らかなので，球に関する鏡像のみ考えます．　中心が O, 半径 r の球 K に関する鏡像を f，　A,B,C,D の f による像を A',B',C',D'とします.

(i) A,B,C,D が全て異なり，かつ無限遠点や O でないとき.

鏡像の定義より「$OA\times OA' = OC\times OC'$」だから，「$\triangle OAC \backsim \triangle OC'A'$」.



故に，

$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{OC}{OA'}$$

同様にして，

$$\frac{AD}{A'D'}=\frac{OD}{OA'},\quad \frac{BC}{B'C'}=\frac{OC}{OB'},\quad \frac{BD}{B'D'}=\frac{OD}{OB'}$$

よって，

$$\frac{[A,B|C,D]}{[A',B'|C',D']}=\frac{\dfrac{AC\times BD}{AD\times BC}}{\dfrac{A'C'\times B'D'}{A'D'\times B'C'}}=\frac{AC}{A'C'}\cdot\frac{BD}{B'D'}\cdot\frac{A'D'}{AD}\cdot\frac{B'C'}{BC}=\frac{OC}{OA'}\cdot\frac{OD}{OB'}\cdot\frac{OA'}{OD}\cdot\frac{OB'}{OC}=1$$

従って，

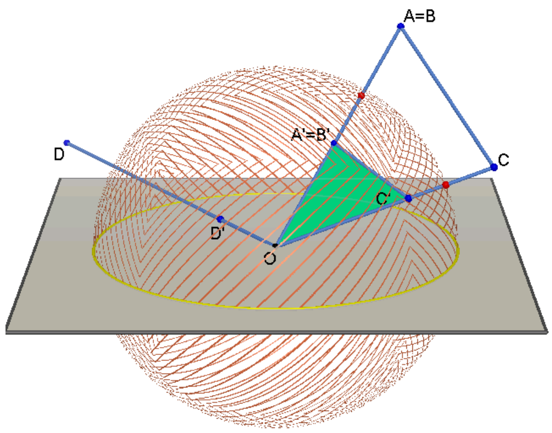
$$[A',B'|C',D']=[A,B|C,D]$$

(ii)A,B,C,D のうち 2 点が等しい場合.

例えば　「A=B」の場合は「A'=B'」となり，複比は「ともに 1」となります.

$$[A,B|C,D]=\frac{AC\times BD}{AD\times BC}=\frac{AC\times AD}{AD\times AC}=1,$$

$$[A',B'|C',D']=\frac{A'C'\times B'D'}{A'D'\times B'C'}=\frac{A'C'\times A'D'}{A'D'\times A'C'}=1$$



ゆえに，

$$[A',B'|C',D']=[A,B|C,D]=1$$

A=C, A=D　の場合も同様に証明できます.

(iii) D が無限遠点，A,B,C は異なる 3 点の場合.

このとき，定義より

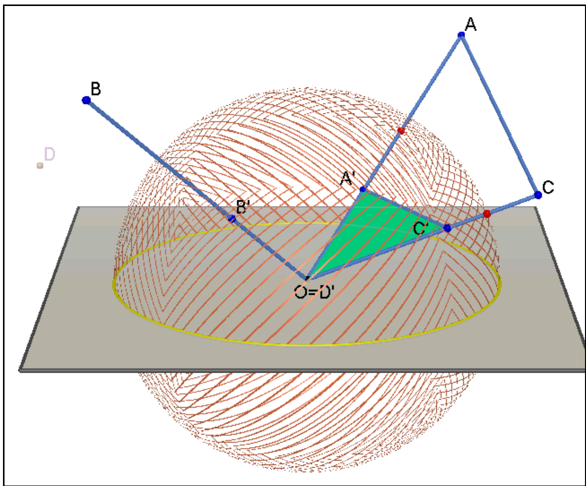
$$[A,B|C,D]=\frac{AC\times BD}{BC\times AD}=\frac{AC}{BC}$$

一方，　D’=O となるので，

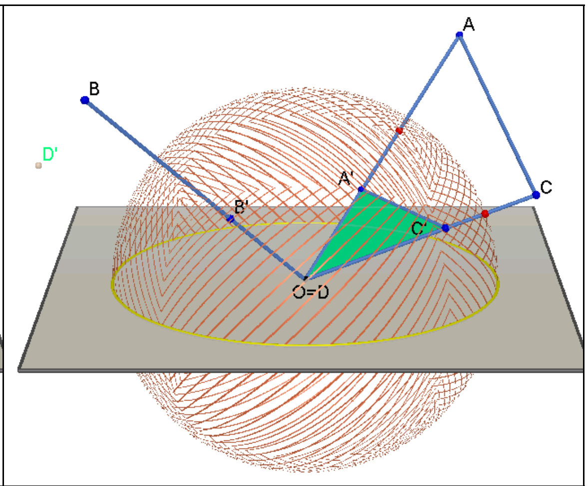
$$[A',B'|C',D']=[A',B'|C',O]=\frac{A'C'\times OB'}{OA'\times B'C'}=\frac{A'C'}{AC}\cdot\frac{AC}{BC}\cdot\frac{BC}{B'C'}\cdot\frac{OB'}{OA'}=\frac{OA'}{OC}\cdot\frac{AC}{BC}\cdot\frac{OC}{OB'}\cdot\frac{OB'}{OA'}=\frac{AC}{BC}$$

故に,この場合も

$$[A',B'|C',D']=[A,B|C,D]$$



(iii) D が無限遠点，A,B,C は異なる 3 点の場合.



(iv) D が O，A,B,C は異なる 3 点の場合.

(iv) D が O，A,B,C は異なる 3 点の場合.

D=O の時は，D’が無限遠点になり　**(iii)の逆**　になります．よって(iii)と同様に成り立ちます．

以上より，何れの場合も　複比は，球に関する鏡像によって変わりません．　　　　Q.E.D.

なお，以上の性質は　4 点 A,B,C,D が同一平面上にあるときでも成り立ちます．この場合は，「球に関する鏡像」は「円に関する鏡像」と同じになります．次の節では　このような複比を使います．

Cabri による検証（複比と鏡像変換）

A,B,C,D を Drag しも，複比は変わりません．　doubleRatio&inverse.html