5.　角度の定義できる条件

5-1.　ユークリッドの公準との関係

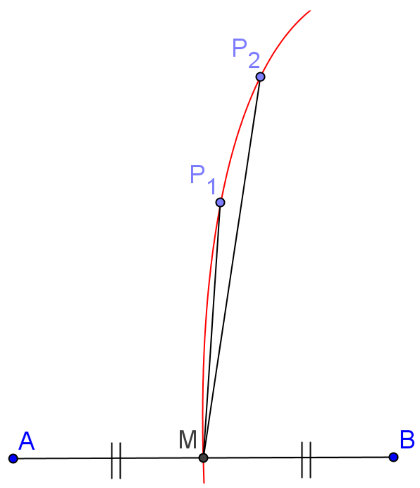
ユークリッドの公準は次の 5 つです.

① 線分は両側に 限りなく伸ばすことが出来る.
② 2 点 A,B を通る線分は　ただ一本引ける.
③ A を中心とし B を通る円が唯一つ描ける.
④ 直角は全て等しい.
⑤ ある点を通り与えられた直線と平行な線（交わらない線）は ただ一本引ける.

この公準①～④より，三角不等式が導かれます．しかし「H の境界 K が多角形のとき，三角不等式は成立するとは限らない（第 1 章)」ので，このとき ①~④のうち成り立たないものがあるはずです．しかし K が凸領域でありさえすれば①,②,③は成立するので「K が多角形のときは④が成立しない」はずです.

5-2.　垂直二等分線との関係

ユークリッドの公理(全体は部分より大きい)を仮定します．H 内の線分 AB の中点を M，垂直二等分線を L とし，L 上の動点を P とします．もし L が直線でないとすると，P が L 上を動く時，∠AMP は変化します．「全体は部分より大きい」ので,下の例では $\angle AMP_1 < \angle AMP_2$ です．始めは直角であってもだんだん直角でなくなってしまいます．故に，公準④の成立する必要条件は「垂直二等分線が直線であること」です.

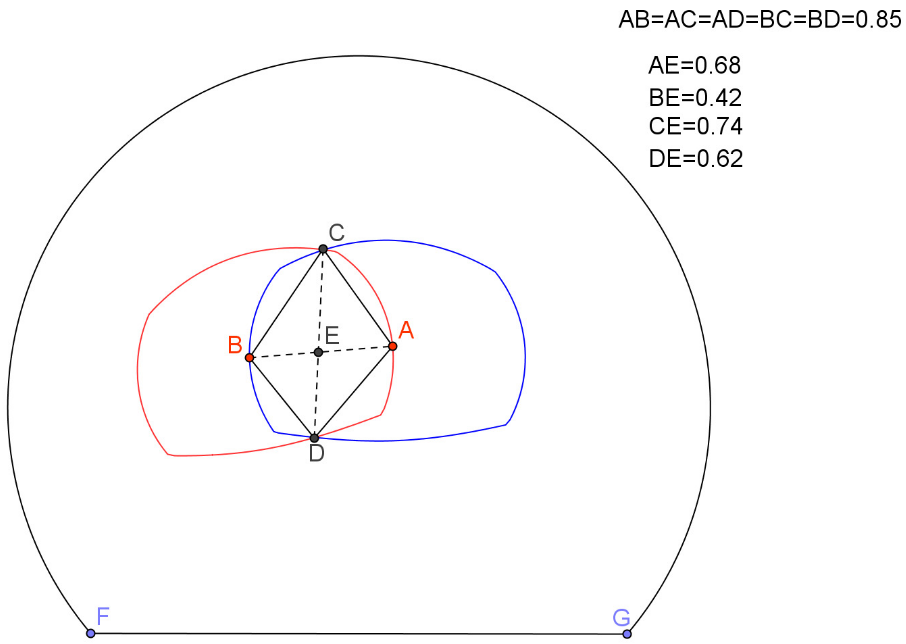


5-3. 角度の定義できる条件

5-2 と 4-5 より，H 内で角度の定義できる必要十分条件は，境界 K が 2 次曲線であること です．

5-4. 境界が conic でないとき

境界が conic でないときは，様々なおかしいことが起こります．下図の境界 K は「円と１線分で囲まれた図形」です．青と赤の曲線はそれぞれ点 A,B を中心とし，点 B,A を通る円です．したがって△ABC と△ABD はユークリッド平面（双曲平面でも）正三角形です．しかし，ここでは正三角形ではありません．



[“regular triangle” in H.ggb]