

1. ヒルベルトの距離, 直線

ヒルベルトの距離と言うのは, クラインモデルの一般化です. 日本語では「ユークリッド幾何から現代幾何へ」小林昭七著 だけと思います. 非常にマイナーですが, ATCM2009 の会議で Herrera Mauricio 教授(チリ大学)の講義に触発されて 自分でも色々やってみました. しかし, 小林先生と Mauricio 教授の論文しか読んでいないので, 重大な間違いがあるかも知れません. なお Mauricio 教授の論文は[こちら](#)にあります.

1-1. 距離, 直線の定義

ユークリッド平面上の凸領域H内に2点P,Qを取り直線PQとHの境界Kの交点を X,Y とします. このとき H 内における P,Q の距離を

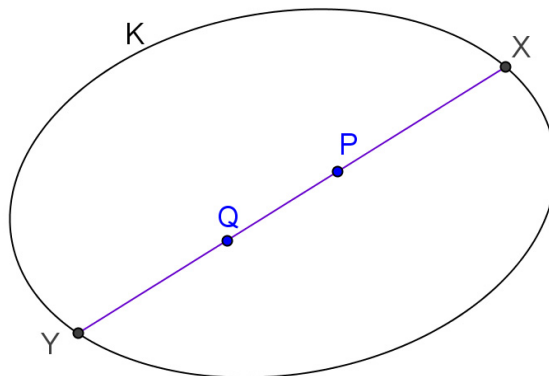
$$disH(P,Q) = |\log([P,Q|X,Y])| = \left| \log \left(\frac{\overline{PX} \cdot \overline{QY}}{\overline{QX} \cdot \overline{PY}} \right) \right|$$

と定め, また線分 XY を H における直線と定義します. H が 2 次曲線のときは, クラインモデルでの「距離, 直線」の定義と一致し, また K は無限遠点の集まりです. 以後, 直線, 距離と言えば上の様に定義されたものを指します.

なお, 上の定義で $[P,Q|X,Y]$ は複比で,

$$[P,Q|X,Y] = \frac{\overline{PX} \cdot \overline{QY}}{\overline{QX} \cdot \overline{PY}}$$

です. \overline{PX} などはユークリッド的距離を表します.



1-2. 三角不等式について

P,Q,R を H 内の異なる 3 点, 直線 PQ,PR,RQ と K との交点を X,Y,S,T,U,V, 直線 SV と TU の交点を O, 直線 OR と PQ の交点を W とします.

境界 K が 2 本以上の線分を含むときは, 三角不等式が成立しないことがあります.

例えば, X,Y,S,T,U,V が左下図の様に線分上にある時, 射影で複比は保存されるので,

$$disH(P,Q)=disH(P,W)+disH(W,Q) = disH(P,R) + disH(R,Q)$$

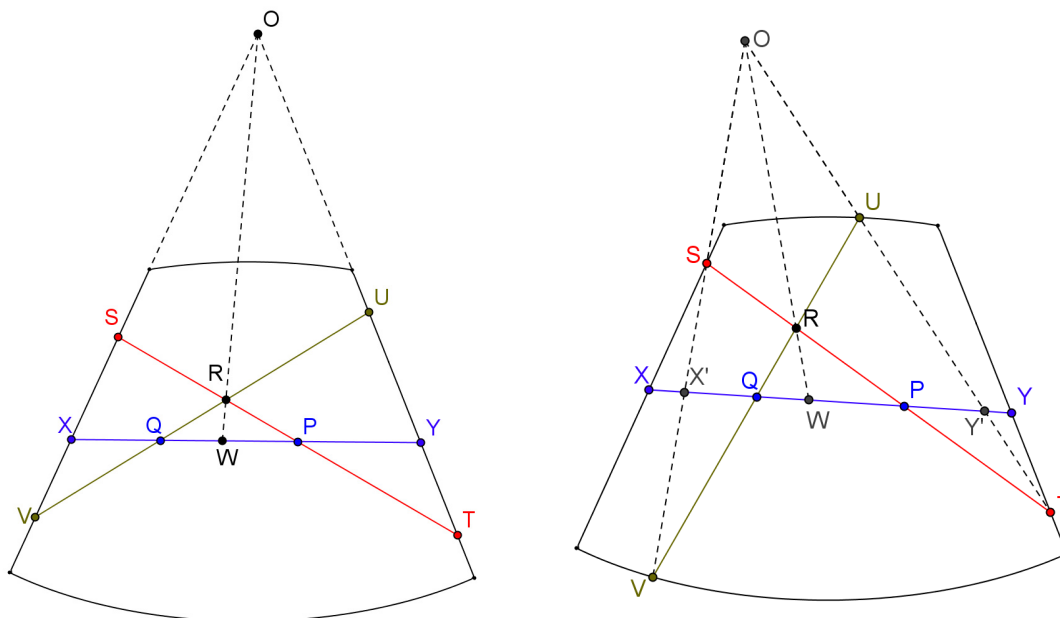
一方, 右下図のように,X,Y が直線 SV,TU 上にない時は, 直線 PQ と SV, TU の交点をそれぞれ X',Y' とすると,

$$[Q,R|V,U]=[Q,W|X',Y'] > [Q,W|X,Y] \quad \therefore disH(Q,R) > disH(Q,W)$$

$$[P,R|V,U]=[P,W|X',Y'] > [P,W|X,Y] \quad \therefore disH(P,R) > disH(P,W)$$

$$\therefore disH(P,Q) = disH(P,W)+disH(W,Q) < disH(P,R)+disH(R,Q)$$

前者では三角不等式は不成立, 後者では成立しています.



1.2.1. Geogebra による検証

[Hdistance1.ggb](#), [Hdistance2.ggb](#)