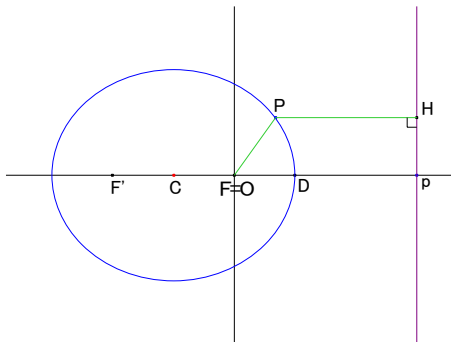


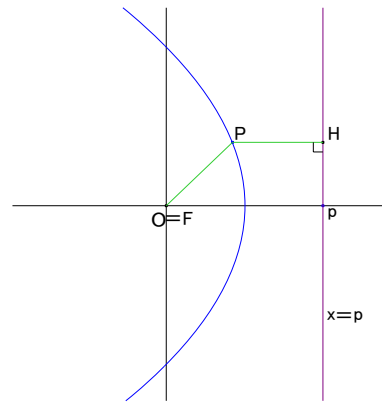
1. 離心率と2次曲線

2次曲線は「定点からの距離と、準線までの距離の比が一定な点の軌跡」としても定義されます。定点を原点 O 、準線を $l; x = p$ 、点 P から l に下ろした垂線の足を H 、 $\frac{OP}{PH} = e$ とすると、 P の軌跡は、

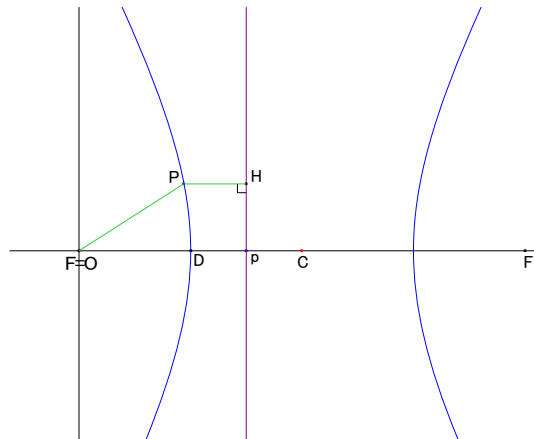
$$\begin{cases} 0 < e < 1 \text{ のとき} & \text{楕円} \\ e = 1 \text{ のとき} & \text{放物線} \\ e > 1 \text{ のとき} & \text{双曲線} \end{cases}$$



$0 < e < 1$ のとき 楕円



$e = 1$ のとき 放物線



$e > 1$ のとき 双曲線

特に、楕円や双曲線の場合、その式はそれぞれ

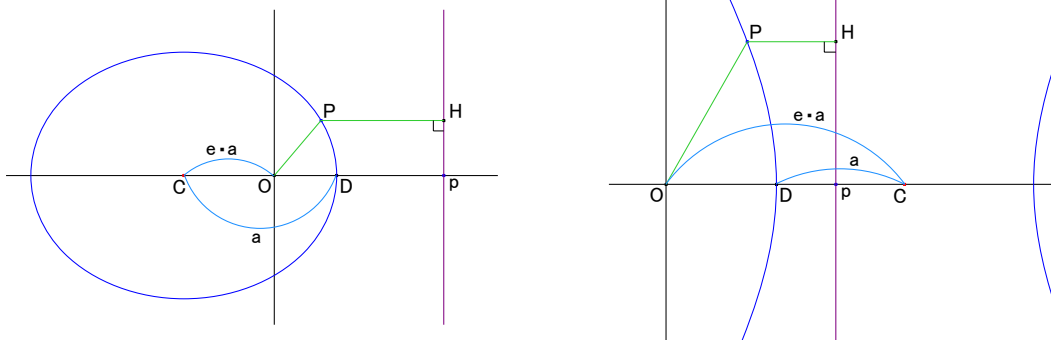
$$\frac{(x + ea)^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{(1 - e^2)a^2} = 1$$

の形になります。よって、 O は焦点となります。

また、中心を C, 2次曲線と長軸の交点のうち O に近い方を D とするとき,

$$\frac{CO}{CD} = e$$

楕円では特に「離心率」(中心からのずれの割合) という名前は納得できます.



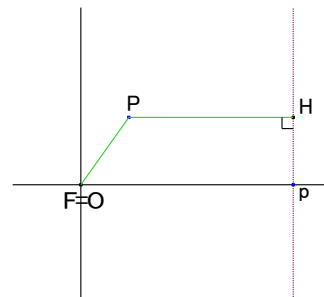
【証明】

$P(x, y)$ とすると, 「 $\frac{OP}{PH} = e$ 」 より,

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= e|x - p| \iff x^2 + y^2 = e^2(x - p)^2 \\ &\iff (1 - e^2)x^2 + 2pe^2x + y^2 - e^2p^2 = 0 \dots (*) \end{aligned}$$

よって, $e = 1$ のとき, $x = -\frac{y^2}{2p} + \frac{p}{2}$

$$e \neq 1 \text{ のとき, } \frac{\left(x + \frac{e^2p}{1 - e^2}\right)^2}{\left(\frac{ep}{1 - e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{(1 - e^2)\left(\frac{ep}{1 - e^2}\right)^2} = 1$$



ゆえに,

$$\begin{cases} 0 < e < 1 \text{ のとき} & \text{楕円} \\ e = 1 \text{ のとき} & \text{放物線} \\ e > 1 \text{ のとき} & \text{双曲線} \end{cases}$$

となります. また $e \neq 1$ のときは,

$$\frac{(x + ea)^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1 - e^2)a^2} = 1, \text{ 但し } a = \frac{ep}{1 - e^2}$$

よって、焦点の1つは原点 O となります。さらに、

$$\frac{\text{中心と焦点の距離}}{a} = e \quad \left(\text{即ち } \frac{CF}{CD} = e \right)$$

も成り立ちます。

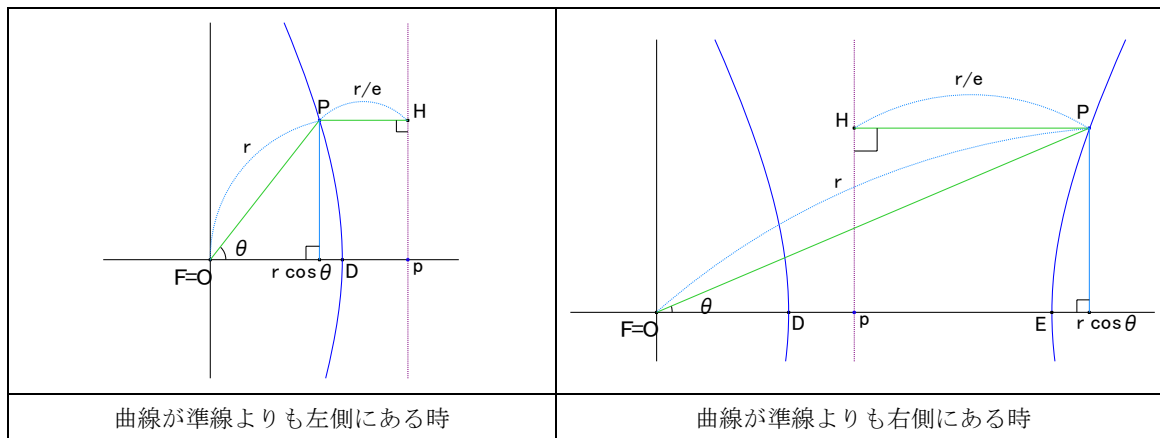
1-1. Cabri II による検証

線分上の点 e 、点 P 、準線と x 軸の交点 p を drag してください。

eccentricity.html

2. 2次曲線と極方程式

原点 O を極としたときの P の偏角を θ ， $OP = r$ ，準線を $x = p$ ，離心率を e とします。



曲線が準線よりも左側にある時，上図より，

$$r \cos \theta + \frac{r}{e} = p \iff r = \frac{ep}{1 + e \cos \theta} \dots \textcircled{1}$$

曲線が準線よりも右側にある時，上図より，

$$r \cos \theta - \frac{r}{e} = p \iff r = \frac{ep}{-1 + e \cos \theta} \dots \textcircled{2}$$

極方程式では，「 $r < 0$ のときは，極座標で (r, θ) の点には $(-r, \theta + \pi)$ を対応させる…(注)」

ので，①と②の式は1つにまとめることができます。即ち②の式で $r < 0$ となるときは，

$$\theta' = \theta + \pi \text{ の偏角に対し， } OP = -\frac{ep}{-1 + e \cos \theta} = -\frac{ep}{-1 + e \cos(\theta' - \pi)} = \frac{ep}{1 + e \cos \theta'}$$

を対応させますから，①と同じになります。すなわち，2次曲線の極方程式は，

$$r = \frac{ep}{1 + e \cos \theta}$$

と1つにまとめることができます。

【注】 このように定めると，極表示と直交表示の基本関係； $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ が， $(-r, \theta + \pi)$ の点に対して

も，成り立ちます。また①，②は，前項の(*)の式に直接，上の基本関係の式を代入しても導けます。

また，Cabri II のファイルは，前項のファイルと共通です。

3. 離心率と2次曲線の標準形

離心率の性質は、教科書で2次曲線の方程式を導くときに「手の届くところに」あります。

3-1. 楕円の場合

焦点が $F(c,0)$ と $F'(-c,0)$ で、 $PF + PF' = 2a$ となる点を $P(x,y)$ とすると、

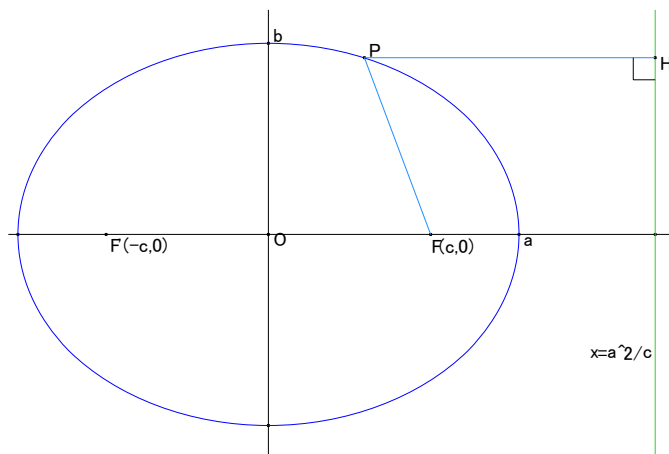
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 2a$$

両辺を2乗して整理すると、

$$4cx = -4a\sqrt{(x-a)^2 + y^2} + 4a^2 \iff \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} - x\right) \dots \textcircled{1}$$

即ち、準線を $l: x = \frac{a^2}{c}$, P から l に下ろした垂線の足を H とするとき、 $\frac{PF}{PH} = \frac{c}{a}$ となり

ます。離心率 e は、 $e = \frac{c}{a} < 1$ です。



【注】 ①の式をさらに2乗して整理すると、楕円の標準形の式が得られます。

3-1. Cabri II による検証

点 P, a, b を drag してください。

[ellipse.html](http://www.geogebra.org/m/ellipse.html)

3-2. 双曲線の場合

焦点が $F(c,0)$ と $F'(-c,0)$ で、 $PF - PF' = 2a$ となる点を $P(x,y)$ とすると、

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2a$$

両辺を2乗して整理すると、

$$4cx = -4a\sqrt{(x-a)^2 + y^2} + 4a^2 \iff \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} - x\right) \dots \textcircled{1}$$

同様に、 $PF - PF' = -2a$ となる点を $P(x,y)$ とすると、

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -2a \iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 2a$$

両辺を2乗して整理すると、

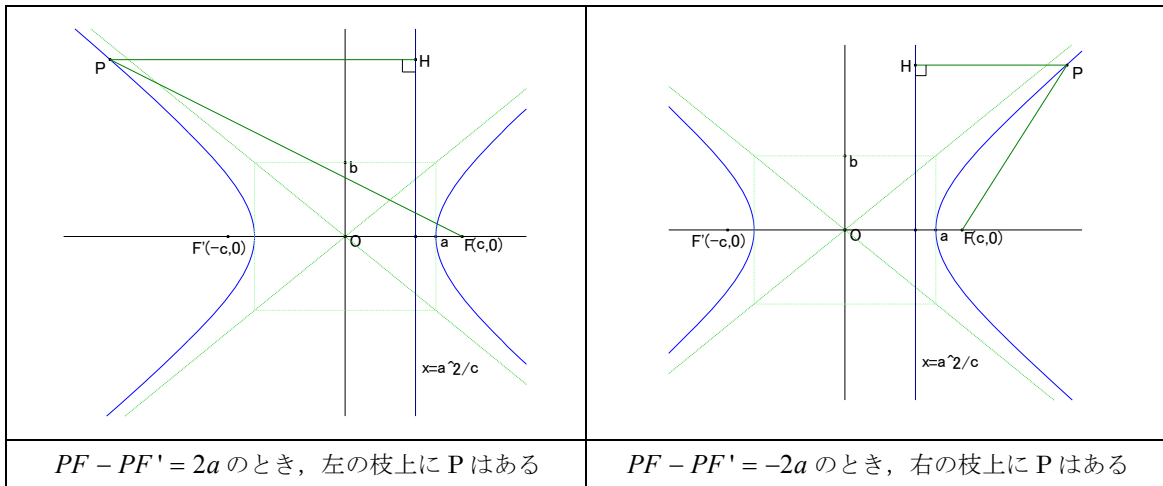
$$4cx = 4a\sqrt{(x-a)^2 + y^2} + 4a^2 \iff \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \frac{c}{a}x - a = \frac{c}{a}\left(x - \frac{a^2}{c}\right) \dots \textcircled{2}$$

①, ②をまとめると、

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \frac{c}{a}\left|x - \frac{a^2}{c}\right| \dots \textcircled{3}$$

即ち、準線を $l: x = \frac{a^2}{c}$, P から l に下ろした垂線の足を H とするとき、 $\frac{PF}{PH} = \frac{c}{a}$ となり

ます。離心率 e は、 $e = \frac{c}{a} > 1$ です。



【注】 ③の式をさらに2乗して整理すると, 双曲線の標準形の式が得られます.

3-2. Cabri II による検証

点 P,a,b を drag してください. 強く引けば, 点 P は一つの枝から, 他の枝に移ります.

hyperbolic.html