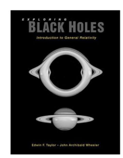
目で見るブラックホール 2

-シュワルツシルト時空内の運動(実例編) -

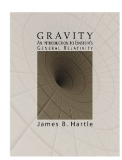
生越　茂樹

参考文献

① 一般相対性理論入門(Black Holes);
Taylor &Wheeler 著,　牧野伸義 訳
② 重力(Gravity);
Hartle 著 ,　牧野伸義訳
③ ブラックホールと時空の歪み;
Thorne著,　林 一・塚原周信 訳
④ ブラックホールの世界(目で視る相対論 I);
福江　純 著
⑤ イメージできる相対性理論
飛車来人　著



①



②

③

特に ① にはお世話になりました. アメリカで 高校の理科の先生も使っている本.
Feynmanを想い起こさせるスタイル(なんと WheelerはFeynmanを教えた事がある!)
②は専門書. 説明は詳しいが「かなり」厚い. 後ろの方だけ テンソルも使う.
③は一般書. 数式なし. Thorneは有名な相対論学者なので, 裏話が色々聞ける.

§0.自由落下物体の軌道

以上から, Shwartzschild 時空の中の自由落下粒子について，次が成り立つ.

$$\begin{cases} \boxed{\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)\dfrac{dt}{d\tau}=e} & \text{(エネルギー保存の法則)} \cdots ① \\ \boxed{r^2\dfrac{d\theta}{d\tau}=l} & \text{(角運動量保存の法則)} \cdots ② \\ d\tau^2=\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)dt^2-\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2-r^2d\theta^2 & \text{(shwartzschild計量)} \cdots ③ \end{cases}$$

③の両辺を $d\tau^2$で割って，①と②を使うと,

$$1=\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2-r^2\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 \to \boxed{\frac{dr}{d\tau}=\pm\sqrt{e^2-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{l^2}{r^2}\right)}} \cdots ④$$

ここで $dr/d\tau$ の符号は物体が中心に向かっているか，離れているかで定まる.
④を数値積分すれば軌跡が求まるが, *Mathematica* では 「$dr/d\tau=0$」になる点(方向転換点)で軌跡が切れてしまう．よって，④をτ で微分すると，$\dfrac{dr}{d\tau}$ の符号によらず,

$$\boxed{\frac{d^2r}{d\tau^2}=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)=\frac{d}{dr}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)\cdot\frac{dr}{d\tau}=-\frac{M}{r^2}+\frac{l^2}{r^3}-\frac{3M\ l^2}{r^4}} \cdots ⑤$$

⑤は *Mathematica* で数値積分できる．②と合わせると, 物体の軌跡が τ の関数として表せる.
さらに①を使うと, 物体の軌跡が t の関数として表せる.

§0-1.有効ポテンシャル

前頁の④より，$\dfrac{dr}{d\tau}=\pm\sqrt{e^2-\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)\left(1+\dfrac{l^2}{r^2}\right)} \Longleftrightarrow \left(\dfrac{dr}{d\tau}\right)^2=e^2-\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)\left(1+\dfrac{l^2}{r^2}\right)$

有効ポテンシャル 「$E_{eff}\equiv\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)\left(1+\dfrac{l^2}{r^2}\right)=f(r)$」を定義すると, $\left(\dfrac{dr}{d\tau}\right)^2=e^2-E_{eff}\cdots⑥$

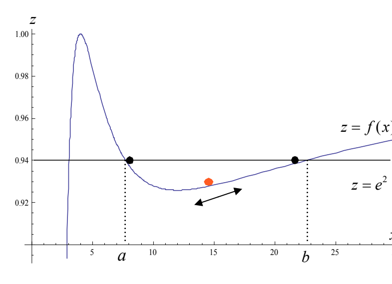
方向転換点では「$dr/d\tau$ の符号が変化」するから, ⑥より,

$e^2>E_{eff}$の範囲のみ運動でき，e^2=E_{eff}において $dr/d\tau\ =0$ となる(殆どの場合は方向転換をする.)　また (e^2-E_{eff})の値が大きいほど, 動径方向に速く動く.

…(*)

一方，地上で, 高さ: $z=f(x)$で, 摩擦のないレール(rail)上に, Newtonエネルギー $E_{newton}=e^2$，質量 m の物体を転がした時，Newton力学では,

$$\frac{m}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}=E_{newton}-f(x)=e^2-f(x)$$



故に, このレール上の 運動と, Shwartzschild 時空中の r 方向の運動は, (*)を充たす点で類似している.
例えば，右図($M=1$, $l=4$)で，$e^2=0.94$ の物体(赤)はレール上では, 2つの黒い点の間を振動する．同様に Shwartschild時空内では, $r=a$ と $r=b$ の同心円の間を振動する 楕円と似た形の軌道を描く.

§ 0-1.有効ポテンシャル(続き)

$f(r)=\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{l^2}{r^2}\right)=\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{M^2}{r^2}\cdot\frac{l^2}{M^2}\right)$. $f'(r)=0$ より, $\boxed{M\ r^2-l^2r+3l^2M=0 \Longleftrightarrow l^2=\frac{r^2M}{r-3M}}$

$f'(r)=0$ が実数解を持つ時，判別式 : $D=(l^2)^2-4\cdot M\cdot 3l^2M\geq 0 \Longleftrightarrow \boxed{l\geq\sqrt{12}M}$

$l=\sqrt{12}\ M$ のとき, $\boxed{r=6M\ \text{(これが 最小の安定軌道半径. } r_{ISCO}\text{と呼ばれる.)}}$

また, $l^2=\frac{r^2M}{r-3M}>0$ より $\boxed{\text{不安定円軌道(ナイフリッジ軌道) の半径は } r>3M}$

また $l>\sqrt{12}\ M$ の時, $f(r)$ は極値を持ち, 極値の値は $\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{r^2M}{r-3M}\right)=\boxed{\frac{(r-2M)^2}{r(r-3M)}}$

右図は，様々な l に関する $E_{eff}\equiv f(r)$ のグラフ.

$r\to\infty$ の時の極限は， $\lim_{r\to\infty}f(r)=1$ (点線で表示)

[例1] $l=4M$ の時「 $M\ r^2-l^2r+3l^2M=0$ 」より,

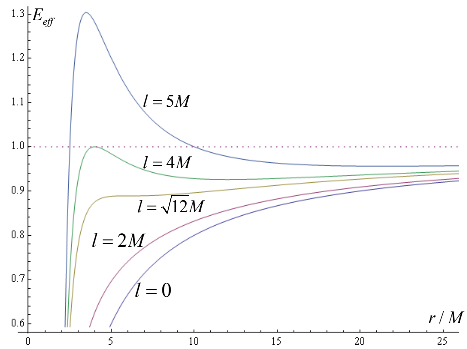
$r\ =\ 4M$(不安定円軌道), 12M (安定円軌道)

「$f_{極値}=\frac{(r-2M)^2}{r(r-3M)}$」 より, $f(4M)=1$

[例2] $l=\sqrt{12}M$ の時「 $M\ r^2-l^2r+3l^2M=0$ 」より,

$r\ =\ 6M$(不安定円軌道&安定円軌道)

「$f_{極値}=\frac{(r-2M)^2}{r(r-3M)}$」 より, $f(6M)=\frac{8}{9}$



§ 0-2.球殻観測者から見た速度と *e, l* の関係

(Taylor&Wheeler著「 Blackhole」 より)

Blackhole から r_0 離れた点で静止している観測者(shell observer)から放たれた「速さ v_0 , 角度θ_0」 の物体の, 単位質量あたりのエネルギー e と角運動量 l の大きさを求める．特殊相対論より, この物体の固有時間 τ は,観測者の時間 t_{shell} に比べ 遅くなり,

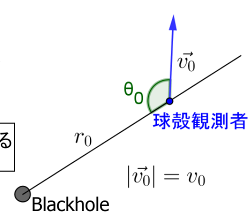
$$\frac{dt_{shell}}{d\tau}=\frac{1}{\sqrt{1-v_0^2}}\quad (=\gamma_0\text{と定義する})$$

また, shwartzschild 時空では, 球殻観測者の時間は，遠方観測者の時間t より遅くなり,

$$\frac{dt_{schell}}{dt}=\sqrt{1-\frac{2M}{r_0}}$$

「静止観測者が観測する局所的エネルギー」

よって, $$\boxed{e=\left(1-\frac{2M}{r_0}\right)\frac{dt}{d\tau}=\left(1-\frac{2M}{r_0}\right)\frac{dt}{dt_{shell}}\cdot\frac{dt_{shell}}{d\tau}=\gamma_0\sqrt{1-\frac{2M}{r_0}}}\quad\cdots⑦$$



(v_0が有限なら「$r_0\to 2M$ の時，$e\to\ 0$ 」 となるのは驚き.)

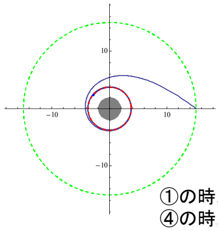
また「$r_0\frac{d\theta}{dt_{shell}}$」は, 観測者から見た「円の接線方向の速度成分」だから, $r_0\frac{d\theta}{dt_{shell}}=\ v_0\ \sin\theta_0$

故に, $$\boxed{l=r_0^2\frac{d\theta}{d\tau}=r_0\cdot r_0\frac{d\theta}{dt_{shell}}\cdot\frac{dt_{shell}}{d\tau}=r_0\cdot v_0\ \sin\theta_0\cdot\gamma_0=r_0\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}}\sin\theta_0}\cdots⑧$$

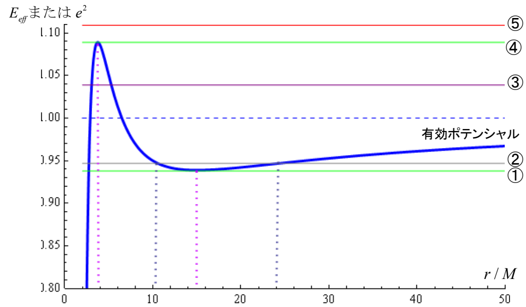
§1. 周回，突入軌道(L一定の時)

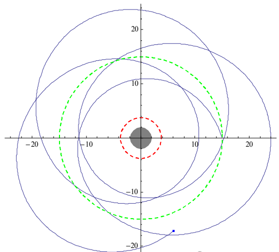
「$r/M=15$」の位置から放たれた「 $l/M=5\sqrt{3}/2$」の点の軌道. (紺の曲線は 有効ポテンシャル. 初期角度と初期速度を l が一定になる様に 変化させて比較.)

物体の軌道(L一定で比較).nb

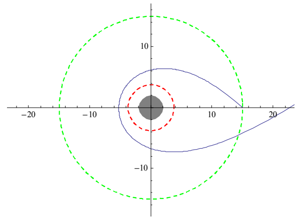


①の時，安定円軌道(緑).
④の時，不安定円軌道(青)
(ナイフエッジ軌道).

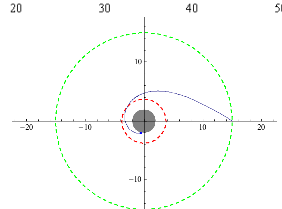




②の時，擬 楕円軌道



③の時，擬 双曲線軌道



⑤の時，突入軌道

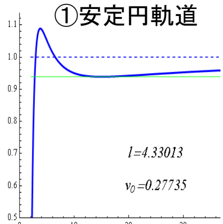
§2. 周回，突入軌道(v_0 一定の時)

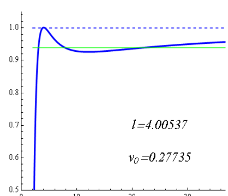
「$r/M=15$」の位置から放たれた「初期速度 v_0 が一定」の点の軌道.

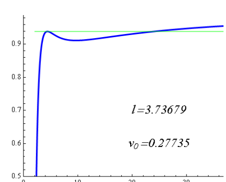
紺は 有効ポテンシャル.　緑は e^2 . 初期角度θ_0 を「$\frac{\pi}{2} \to 0$」にする事により

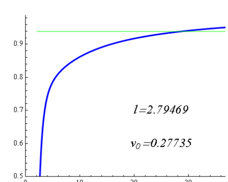
運動量と有効ポテンシャルを変化させて比較.

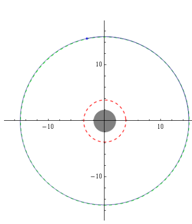
①安定円軌道　②擬楕円軌道　③ナイフリッジ軌道　④突入軌道

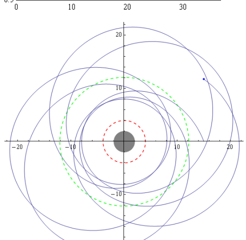


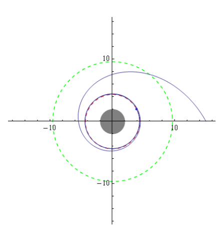


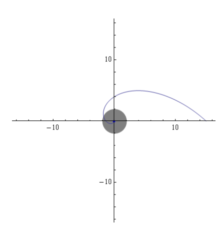








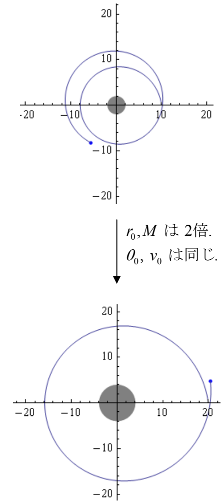




§ 3.相似な軌道

[§0-2と参考文献①参照] $r=r_0$ の点で静止している観測者(shell observer)
から見て, 初期速度v_0 と初期角度θ_0 で, 発射された物体では,

$$\boxed{e=\left(1-\frac{2M}{r_0}\right)\frac{dt}{d\tau}=\left(1-\frac{2M}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-v_0^2}}},\quad \boxed{l=r_0^2\frac{d\theta}{d\tau}=r_0\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}}\sin\theta_0}$$



よって v_0 とθ_0 を変えないで, r_0 とM を (例えば)2倍にしたとすると
e は変わらず, l は 2 倍になる. このとき, 運動方程式:

$$「\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2=e^2-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{l^2}{r^2}\right) \text{ かつ } l=r^2\frac{d\theta}{d\tau}」に於いて,$$

$r'=2r,\ \tau'=2\tau$ となるように単位を変え, $M'=2M,\ l'=2l$ とおくと

$$\left(\frac{dr'}{d\tau'}\right)^2=e^2-\left(1-\frac{2M'}{r'}\right)\left(1+\frac{l'^2}{r'^2}\right) \text{ かつ } l'=r'^2\frac{d\theta}{d\tau'}$$

よって, r'とτ' で表された方程式と, 元の方程式は同じになる.
同様に, $\overrightarrow{v_0}$ が同じで, Mとr_0 が 共に a 倍になった物体の軌跡は,
r が a 倍で, 時間の進み方が $1/a$ 倍の軌跡 (Blackholeを中心にa 倍に
拡大, $1/a$ 倍にスロー再生した様な軌跡)となる.
特に「$r=2M$の表面から自由落下した時,中心までの時間は πM」で, M に比例する.
また, $M/r\ =\ b$ の点に静止している観測者にかかる重力は $\dfrac{b^2}{M\sqrt{1-2b}}$で, M に反比例する.

§ 4.脱出軌道(L,v_0共に変化)

$r_0=3M$ の位置に作った球殻上の静止観測所から, 非常用宇宙船で脱出したい.
(1) Blackhole から完全に脱出するために必要な最低速度v_0 と初期角度θ_0 を求めよ.

(1) (以下 §0-1 & §0-2 参照)

$$e=\gamma\sqrt{1-\frac{2M}{r_0}}=\frac{1}{\sqrt{1-v_0^2}}\sqrt{1-\frac{2M}{r_0}}$$

無限遠に脱出できる最低エネルギーは e=1 だから,

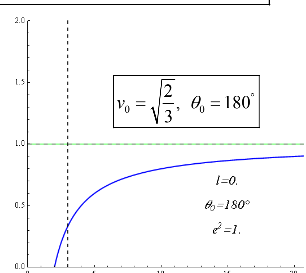
$$1=\frac{1}{\sqrt{1-v_0^2}}\sqrt{1-\frac{2M}{r_0}} \iff \boxed{v_0=\sqrt{\frac{2M}{r_0}}}$$

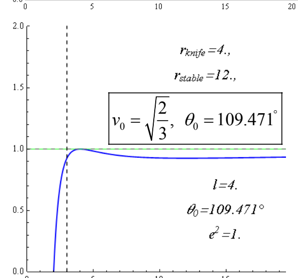
故に $r_0=3M$の時, $v_0=\sqrt{2/3}\approx 0.816497$
$f(r)=1,\ f'(r)=0$ の時, $r=l=4M$.

$$l=4M \text{ より,}\quad r_0\frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}}\sin\theta_0=4M.\quad \therefore\ \sin\theta_0=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore\ \theta_0=\ \pi-\arcsin(2\sqrt{2}/3)\approx 1.91063\ (109.471^\circ)$$

即ち, 初期速度≈ 0.816497. 初期角度 $\theta_0 \geq 109.471^\circ$ が必要.





$r_0 = 3M$ の位置に作った球殻上の静止観測所から，非常用宇宙船で脱出したい.
(2) 最小安定円軌道に載るために必要な最低速度 v_0 と初期角度 θ_0 を求めよ.

(2) (以下 §0-1 & §0-2 参照)

$$e = \gamma\sqrt{1-\frac{2M}{r_0}} = \frac{1}{\sqrt{1-v_0^2}}\sqrt{1-\frac{2M}{r_0}}$$

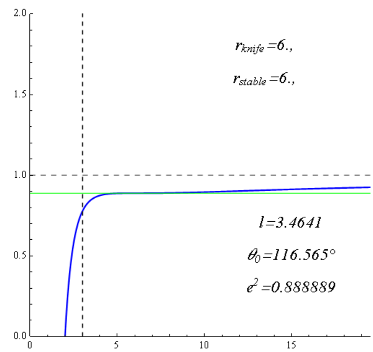
最小安定円軌道の半径は $r_{ISCO} = 6M$.

この時, $e^2 = 8/9$ だから,

$$\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{1}{\sqrt{1-v_0^2}}\sqrt{1-\frac{2M}{r_0}} \iff \boxed{v_0 = \frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2M}{r_0}-\frac{1}{9}}}$$

故に $r_0 = 3M$ の時, $v_0 = \sqrt{5/8} \approx 0.790569$

$l = \sqrt{12}M$ より， $r_0\dfrac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}}\sin\theta_0 = 12\,M$.　$\therefore \sin\theta_0 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$



$\therefore\ \theta_0 = \ \pi - \arcsin(2/\sqrt{5}) \approx 2.03444\ (116.565^\circ)$

即ち, 初期速度 ≈ 0.790569.　初期角度 $\theta_0 = 116.565^\circ$ が必要.

これは「無限遠までの脱出速度 ≈ 0.816497」より, 少しだけ小さい.