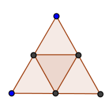
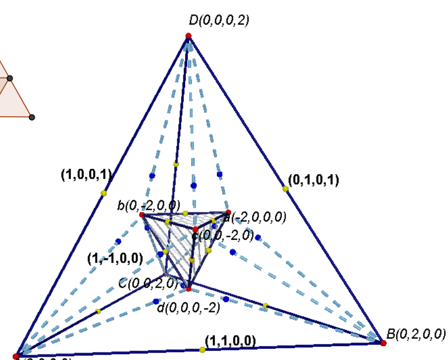
正600胞体の
投影図,展開図

Cabri 研究会　2012年11月18日
生越　茂樹

(review) 正24胞体

正16胞体の24本の辺の中点(24個)が頂点.
このうち，正16胞体の同じ面上にある2点
を結んだ線分が辺となる．(右図)





正24胞体.cg3

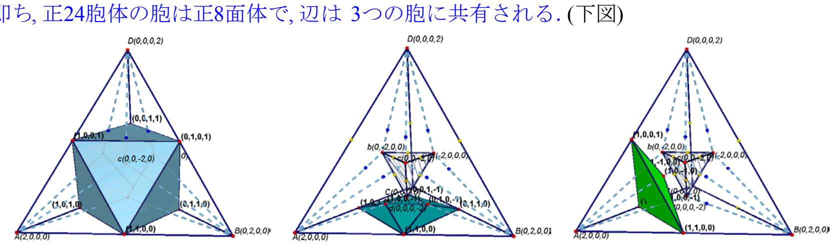
正16胞体は32の面を持ち，その各面に対し,
辺が3本できるから, 正24胞体の辺の数は,

$32 \times 3 = 96$本

一方，正24胞体の1つの胞 (正8面体) は,12本の辺
があるから，1辺をn個の胞が共有するとすると,
正24胞体の辺の数は, 12本$\times 24 \div n = 96$.

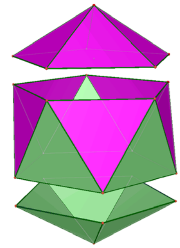
$\therefore n = 3$

即ち, 正24胞体の胞は正8面体で, 辺は 3つの胞に共有される. (下図)



§ 1. 正600胞体の頂点,胞

正600胞体は，3次元の正20面体を4次元に拡張したもので，
600個の正四面体の胞からなる．

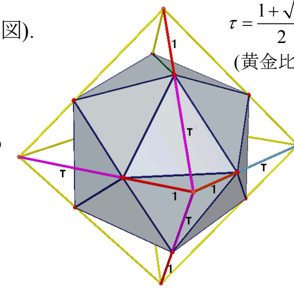


正20面体の点を, body(中央部10点)とcap(上下2点)に分けると，
正20面体の面は，bodyの3点から作られる10面と,
bodyの2点とcapの1点から作られる10面からなる (右図).

正600胞体の頂点はBodyとCapの2種類に分類できる．

$\begin{cases} \text{Body: 正24胞体の正8面体胞の各辺を黄金分割した点(右下図).} \\ \text{Cap:　Bodyに含まれてない点.} \end{cases}$

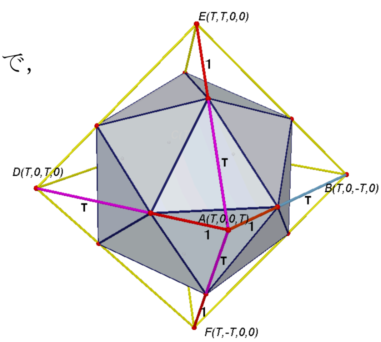
$\tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
(黄金比)



1つの正8面体胞から12個の点ができ，正24胞体の各辺は, 3つの正8面体胞に共有されるので，Bodyの点は，$24 \times 12 \div 3 = 96$個.
1つの正8面体胞から 20面の正三角形ができ，その各々に対しCapの点が1つ対応するので, Capの点の個数は，24個

正8面体と正20面体.cg3

例えば, 超平面π_1: $x+y+z+u=2\tau$上の正8面体で,
頂点が A$(\tau,0,0,\tau)$, B$(0,\tau,0,\tau)$, C$(0,\tau,\tau,0)$,
D$(\tau,0,\tau,0)$, E$(\tau,\tau,0,0)$,F$(0,0,\tau,\tau)$ のとき,
各辺を黄金分割した点は, $(1,\tau,0,\tau^{-1})$ を
偶置換した 4!÷2=12点となる．この胞に
対する Capの点は P(1,1,1,1)で，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \pi_2$.



超平面π_2: $x=\tau$上の正8面体で，頂点が A$(\tau,0,0,\tau)$, B$(\tau,0,\tau,0)$, C$(\tau,0,0,-\tau)$,
D$(\tau,0,-\tau,0)$, E$(\tau,\tau,0,0)$, F$(\tau,-\tau,0,0)$のとき，黄金分割してできる点は,
$(\tau,1,\tau^{-1},0)$, $(\tau,1,-\tau^{-1},0)$, $(\tau,-1,\tau^{-1},0)$, $(\tau,-1,-\tau^{-1},0)$の 4 点の偶置換のうち
$x=\tau$を充たす$4\times 3!/2=12$点．対応するCapの点は Q(2,0,0,0)で，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \perp \pi_2$

一般に，$(\pm\tau,\pm 1,\pm\tau^{-1},0)$ の偶置換 ($2^3\times 4!\div 2=96$個) を Body に,
$(\pm 1,\pm 1,\pm 1,\pm 1)$，$(\pm 2,0,0,0)$，$(0,\pm 2,0,0)$，$(0,0,\pm 2,0)$，$(0,0,0,\pm 2)$ の置換
($2^4+2\times 4=24$個) を Cap にとることができる．合計で点の数は120個.

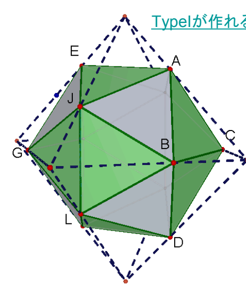
§2. 様々なタイプの胞

正600胞体の胞は,「 Bodyの 3点 とCap の 1点 から作られる胞」 と,
「Bodyのうち 4点を選んで作られる胞」の, 大きく分けて 2種類ある.

$\boxed{1}$ 前者は, 各々の正20面体胞Vの各面 （正三角形)を底面に, Vに対応するCapの1点P ($\overrightarrow{OP} \perp V$) を頂点にした 超三角錐で, $24 \times 20 = 480$個

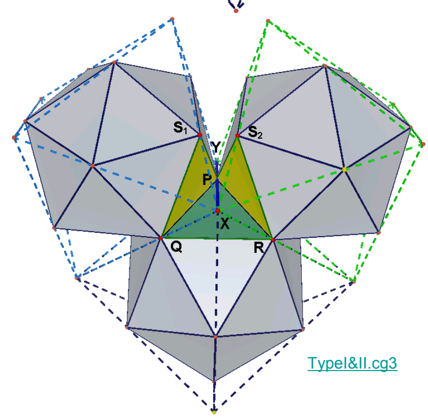
$\boxed{2}$ 後者は「隣接 正20面体胞からの4点の選び方」で２つに分けられる.
TypeI: 正20面体胞Vから3点を, もう1点を 別の正20面体胞から取る.
TypeII: 隣接する6つの正20面体胞$V_1, V_2, \cdots V_6$から2点ずつ取る.
(各点は3回ずつダブルカウントされるので, 異なる点は2点$\times 6 \div 3=4$点.)

TypeI の胞



正20面体の面のうち, 正8面体と共有される8面はTypeI/IIの胞を作れない. (Capの点と組になり胞を作る.)
それ以外の 20−8=12面から, TypeIの胞は作られる.

正24胞体は, 各辺を正8面体の3つの胞V_1~V_3が共有する. 共有される辺をXY, XYを $\tau:1$ に黄金分割する点をP, Xを通りXYと60°で交わる4辺を黄金分割した点を, $V_k (k=1,2,3)$ から各々2点ずつとり, Q& R,Q&S_1, R&S_2とする. (右図)



このとき, 4次元空間では $S_1 = S_2 (\equiv S)$で, P,Q,R,Sは TypeIの胞を作る. この胞は, 3つの正8面体で共有されるから,
TypeIの胞数は, $12 \times 24 \div 3 = 96$室.

TypeII の胞

V_1の頂点の内, 平面XQRに関し Yと対称な点をY'とし，線分XY'に関して
(前頁の) Sと同様に作成した点をTとすると, SとTは平面XQRに関し対称.
そして Q,R,S,T は TypeIIの正四面体胞を作る.

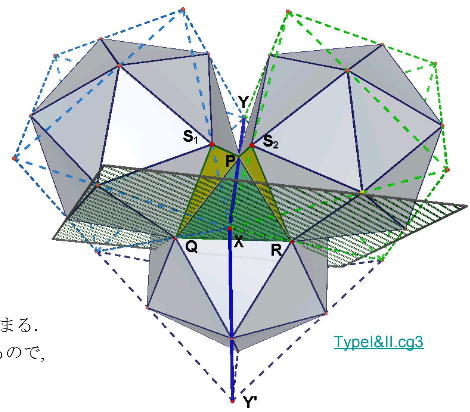
即ち，正8面体の６つの頂点の周りに
TypeIIの正四面体胞は１つずつできる.
各々の正四面体胞は6つの正8面体に
共有されるので, TypeIIの胞の個数は

$24 \times 6 \div 6 = 24$室

以上より，正600胞体の胞の個数は

480+96+24=600室

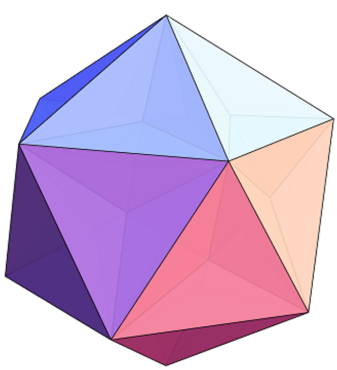
[注] 正600胞体の面, 辺の数は 次の様になる.
Capの点は 正12面体の頂点から引かれる12本の辺が集まる.
正600胞体は120個の頂点があり,2頂点が1辺を共有するので,
　辺の数は, $120 \times 12 \div 2 = 720$本
胞は600室, 1室は4面を持ち, 2室は 1面を共有するから,
　面の数は, $600 \times 4 \div 2 = 1200$面



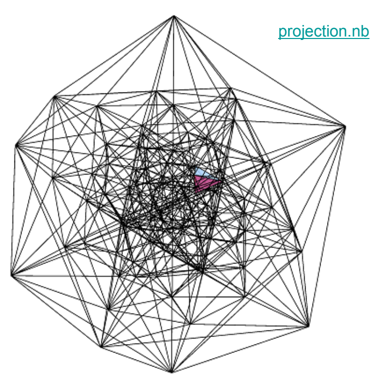
（SとTは平面XQRに関し対称. Tは表示してない）

§ 3. 正600胞体の中心投影

§1の座標で与えられる正600胞体を，u 軸方向に d $(d > \tau)$ 平行移動し,
原点から, 超平面 $u = 1$ の上に中心投影した．下図は,共に $d = \tau + 0.5$ の時.
この時, 超平面 $u = -\tau$ 上の正20面体と, 対するCapの点 $(0,0,0,-2)$ から作られる
20個の胞は, 他の胞に比べ $u = 1$ に非常に近い．故に外形は正20面体に見える.



Body (面も表示)



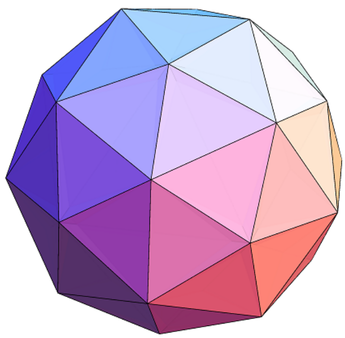
Skelton (頂点と辺のみ表示)

$d = \tau + 1.5$ の時.

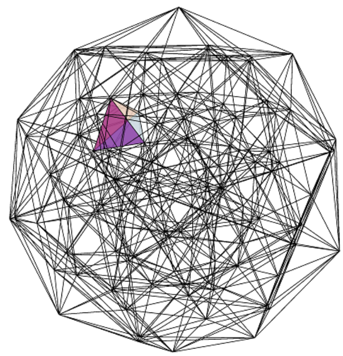
この時, 超平面 $u = -\tau$ 上の胞は, 他の胞に比べ $u = 1$ に特に近い訳ではない.
故に外形は正20面体に見えない. 半正多面体でも一様多面体でもなく
各頂点には 5つまたは 6つの三角形が集まる不思議な多面体.

(なお, 右下図の色付けした胞は, $x + y + z + u = 2\tau$ 上のCap型の胞.)

projection.nb



Body



Skelton

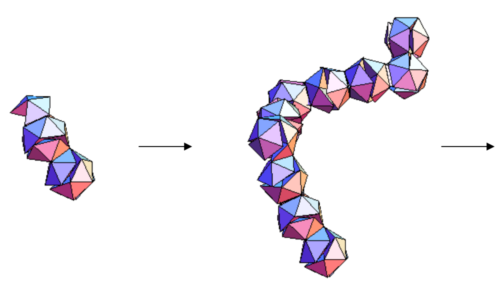
§4. 正600胞体の展開図

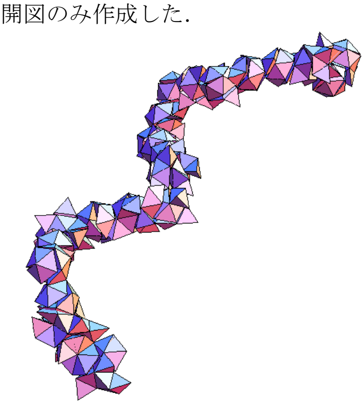
3次元空間内で, 同一平面上にない面Xと面Yが 辺 l を共有する時, l を軸とする回転で,
YをXと同じ平面上に展開できる.

snake.cg3 starfish.cg3

同様, 4次元空間内で, 同一超平面上にない 胞XとYが 面 S を共有するとき, S を軸とする
回転で , Yを Xと同じ超平面上に展開できる. 従って, 面の共有関係を調べるだけで,
胞を展開する事ができる. ここでは 擬snake型の展開図のみ作成した.

develope.nb (Notebookを再評価する毎に, 新しい展開図が作られます.)





【注】次の様に プログラムしました.

① 正24胞体をsnakeの様に展開する. (正8面体のchainができる.)

② 各々の正8面体胞から, Cap型の正四面体を作成しsnakeの様につなぐ.

③ TypeI/IIの正四面体を, ②の正四面体に「こぶ」の様にくっ付ける.