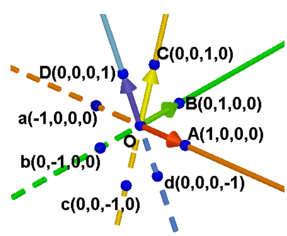
正24胞体の
投影図,展開図

Cabri 研究会　2012年7月1日
生越　茂樹

(review) 正16胞体の頂点,辺,面,胞

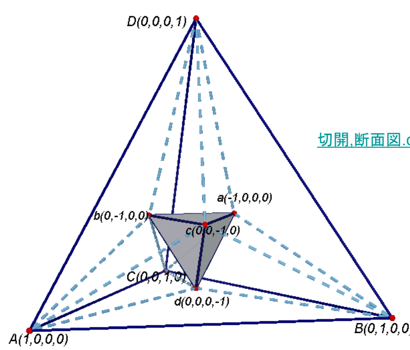
座標軸上の8点A(1,0,0,0), B(0,1,0,0), C(0,0,1,0), D(0,0,0,1), a(−1,0,0,0), b(0,−1,0,0), c(0,0,−1,0), d(0,0,0,−1)を頂点,
各々の点Xと，Xと異なる軸上の点Yを結ぶ線分を辺とする超立体を考える. この時, 各頂点から6本の辺が出て,
A_i, B_j, C_k, D_l を頂点とする 2^4個の正四面体が胞となる.
(但し $i=0,1$, $A_1=\mathrm{A}$, $A_2=\mathrm{a}$とする．B_j, C_k, D_l も同様)



即ち, この超多面体の,

頂点の数は,	8個,
辺の数は,	$8\times6(\text{本})\times\frac{1}{2}=24$本,
面の数は,	$16\times4(\text{面})\times\frac{1}{2}=32$面,
胞の数は,	16室

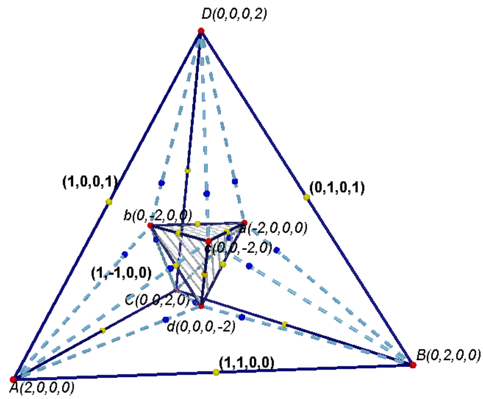
となり，全ての頂点は対等である.
このような胞体を 正16胞体 という.



切開,断面図.cg3

§1. 正24胞体の 頂点,辺,面,胞

正16胞体の24本の辺の中点(24個)が頂点.
このうち，正16胞体の同じ面上にある2点
を結んだ線分が辺となる.
以下, 正16胞体の頂点が
$(\pm 2,0,0,0)$, $(0,\pm 2,0,0)$,$(0,0,\pm 2,0)$, $(0,0,0,\pm 2)$
とする．この時，正24胞体の頂点は
$(\pm 1,\pm 1,0,0)$, $(\pm 1,0,\pm 1,0)$, $(\pm 1,0,0,\pm 1)$,
$(0,\pm 1,\pm 1,0)$, $(0,\pm 1,0,\pm 1)$, $(0,0,\pm 1,\pm 1)$
合計: $4\times 6=24$個

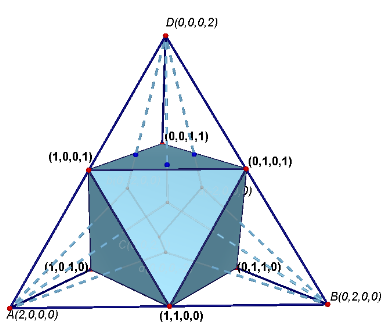


このうち, 正16胞体の同じ面上にある
任意の２点をP,Qとすると, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は
正16胞体の, ある辺と平行で長さは$\dfrac{1}{2}$倍だから
$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(\pm 1,\pm 1,0,0)$, $(\pm 1,0,\pm 1,0)$, $(\pm 1,0,0,\pm 1)$, $(0,\pm 1,\pm 1,0)$, $(0,\pm 1,0,\pm 1)$, $(0,0,\pm 1,\pm 1)$ のいずれか.
故に, 一辺の長さは $\sqrt{1^2+1^2+0^2+0^2}=\sqrt{2}$
また，正16胞体は32の面を持ち，その各面に対し, 辺が3本できるから,
正24胞体の辺の数は, $32\times 3=96$本

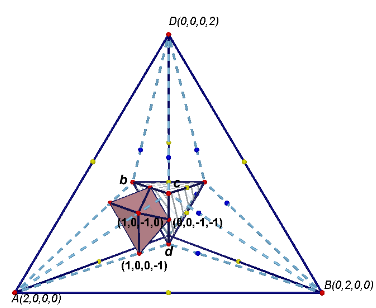
正16胞体と正24胞体.cg3

2つのタイプの胞

正24胞体には 2種類の胞がある.
1つのタイプの胞 (typeAと名づける) は , 正16胞体の各胞 (正四面体) の
6つの辺の中点を結んで出来る正8面体で，超平面 $ax+by+cz+du=2$
(但し a,b,c,d は ± 1) 上に 各々1つずつある．TypeAの胞は $2^4=16$室ある.

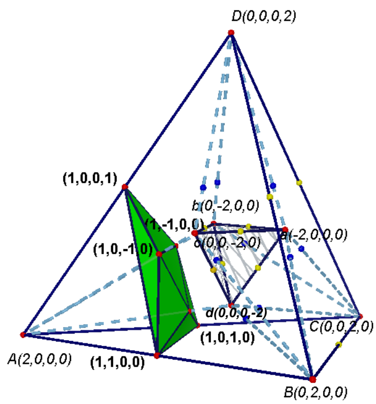


x+y+z+u=2 上の正8面体
(正四面体A-BCDの中の胞)

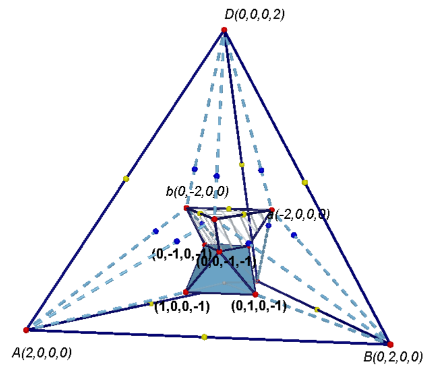


x-y-z-u=2 上の正8面体
(正四面体A-bcdの中の胞)

もう1つのタイプの胞 (typeBと名づける) は , 正16胞体の各頂点から出ている6つの辺の中点を結んで出来る正8面体で，超平面 $x=\pm1$, $y=\pm1$, $z=\pm1$, $u=\pm1$ 上に各々1つずつある．TypeBの胞は $2\times4=8$室ある.



***x*=1 上の 正8面体**
（A(2,0,0,0)の周りの胞）



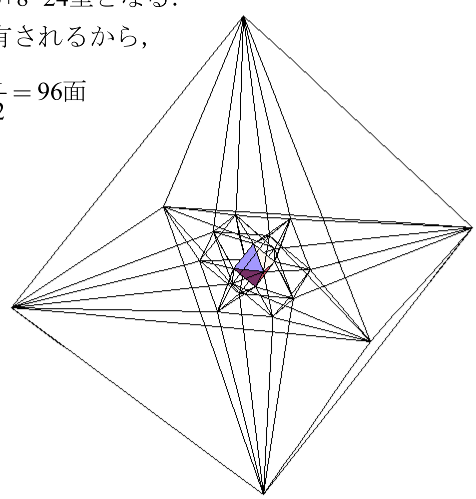
***u*=-1 上の 正8面体**
（d(0,0,0,-2)の周りの胞）

以上から 正24胞体の胞の数は 16+8=24室となる.
また, 1つの面は, 2つの胞体で共有されるから,
正24胞体の面の数は，$8面\times24\times\dfrac{1}{2}=96面$

即ち, この胞体の,

頂点の数は,	24個
辺の数は,	96本
面の数は,	96面
胞の数は,	24室

となり，全ての頂点は対等である.
このような胞体を 正24胞体 という.
また，表から, 正24胞体は自分自身と双対である事がわかる.



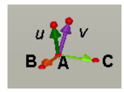
正16胞体を消去し, 正24胞体のみを 描いたもの. (by Mathematica)

もう1つの投影図(by zome)

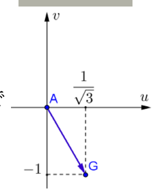
§ 2. 展開図 (原理)

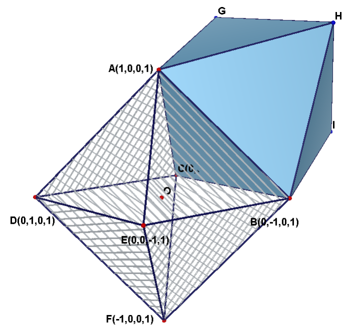
例えば A(1,0,0,1), B(0,−1,0,1), C(0,0,1,1), D(0,1,0,1), E(0,0,−1,1), F(−1,0,0,1) は,
超平面$u=1$上の胞の頂点をなす．また
A(1,0,0,1), B(0,−1,0,1), C(0,0,1,1), G(1,0,1,0), H(1,−1,0,0), I(0,−1,1,0) は,
超平面$x-y+z+u=2$上の胞の頂点となり，これら 2 胞は△ABCを共有する．今,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \vec{u}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ \vec{v}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$$ とすると, $\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}},\vec{u},\vec{v}$ は正規直交基底を作る.



ここで, $\vec{u},\vec{v}$で張られる平面π の上 への
$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ の射影は $(\overrightarrow{\mathrm{AG}})_{on\ \pi}=\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{u}+(-1)\vec{v}$ だから,
平面ABCを軸とする (i.e. π上の) 回転: $\mathrm{R}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ で
Gは 超平面 $u=1$ 上に移る.
同様に, この回転で HとIも $u=1$ 上に移る.
故に $x-y+z+u=2$上の胞は $u=1$上に展開される.
他の胞も 同様の回転の繰り返しで $u=1$上に展開される.

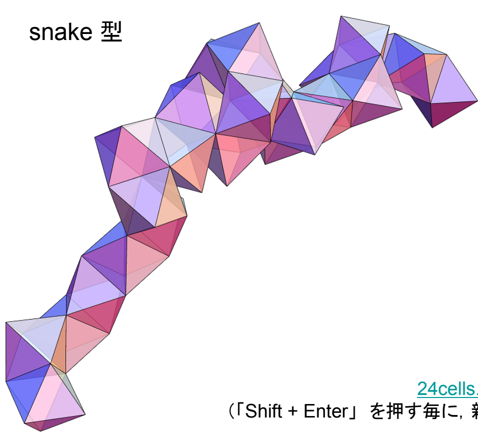




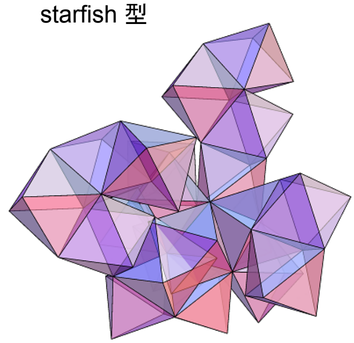
§ 3. 様々な展開図

3次元空間内で，同一平面上にない面Xと面Yが 辺 l を共有する時, l を軸とする回転で,
YをXと同じ平面上に展開できる.　　snake.cg3　starfish.cg3
同様, 4次元空間内で, 同一超平面上にない 胞XとYが 面 S を共有するとき, S を軸とする
回転で , Yを Xと同じ超平面上に展開できる．従って，面の共有関係を調べるだけで,
胞を展開する事ができる．下の snake型と starfish型は その典型例である.

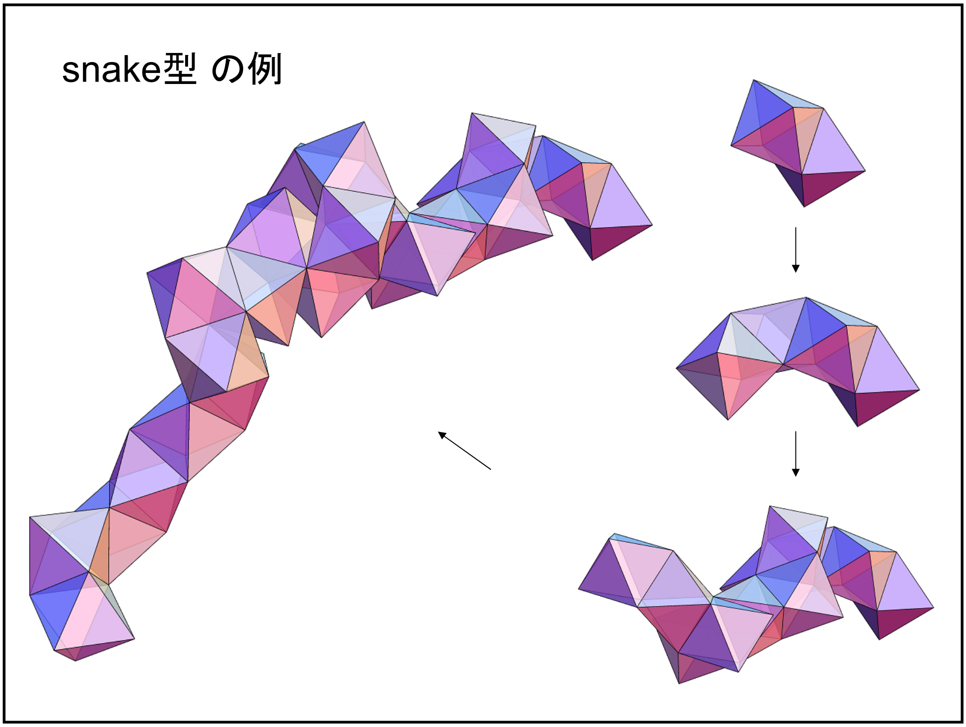
snake 型

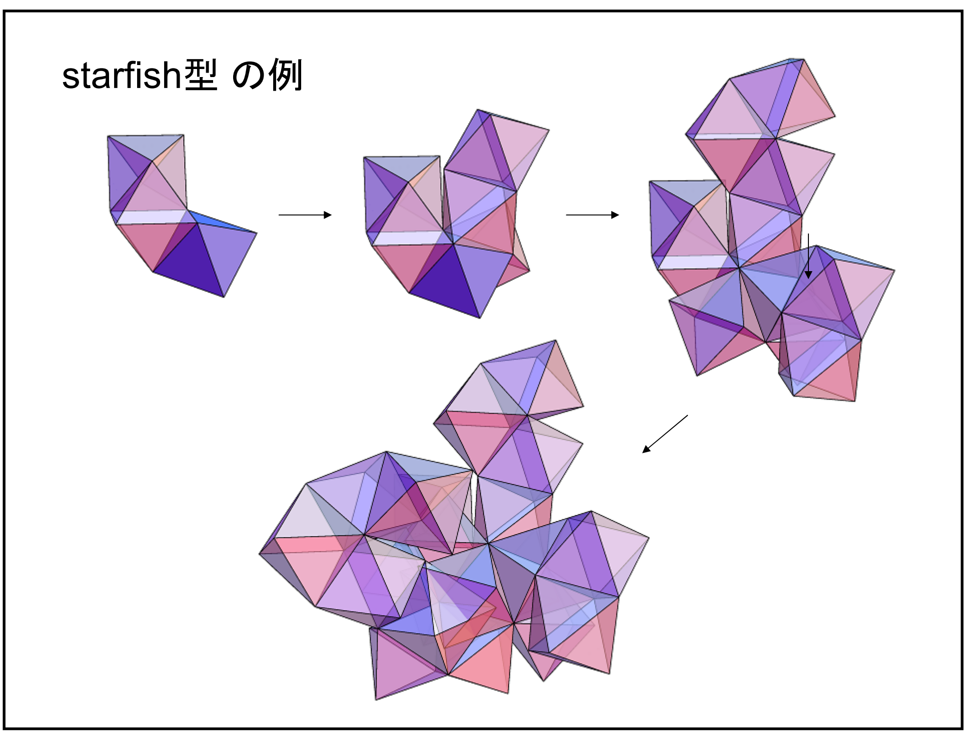


starfish 型



24cells.nb
(「Shift + Enter」を押す毎に, 新しい展開図が作られます.)


snake型 の例


starfish型 の例